VISIT…

Г. И. БАРЕНБЛАТТ
В. М. ЕНТОВ
В. М. РЫЖИК

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПРИРОДНЫХ ПЛАСТАХ

Москва „Недра“ 1984

УДК 532.546

Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М., Недра, 1984, 211 с.

Изложены основы теории движения жидкостей и газов в природных пластах с учетом их реальных свойств. Приведены классические и неклассические модели движения однородных жидкостей, а также модели неравновесных фильтрационных процессов. Рассмотрено движение неоднородных несмешивающихся жидкостей и физико-химическая гидродинамика процессов вытеснения.

Для научных работников и специалистов, занимающихся проектированием разработки и разработкой нефтяных и газовых месторождений; будет полезна студентам старших курсов нефтяных вузов.

Ил. 68, список лит.— 48 назв.

Рецензент д-р техн. наук *Ю. П. Желтов* (МИНХ и ГП им. акад. И. М. Губкина).

Григорий Исаакович Баренблатт
Владимир Мордухович Ентов
Виктор Михайлович Рыжик

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПРИРОДНЫХ ПЛАСТАХ

Редактор издательства Е. А. Петрова
Переплет художника Е. К. Самойлова
Художественный редактор В. В. Шутько
График-иллюстратор С. И. Ерохин
Технические редакторы Н. С. Гришанова, Н. В. Жидкова
Корректор М. И. Кряковкина

ИБ № 4601

Сдано в набор 29.11.83 г. Подписано в печать 31.07.84. Т-16255. Формат 60×90/16. Бумага типографская № 1. Гарнитура «Литературная». Печать высокая. Усл. п. л. 13,0. Усл. кр.-отт. 13,0. Уч.-изд л. 13,77. Тираж 2800 экз. Заказ № 4-2/8596-6. Цена 2 р. 40 к.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра», 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19

Харьковская книжная фабрика «Коммунист», 310012, Харьков-12, Энгельса, 11.

Б $\frac{2504030300-434}{043(01)-84}$ 177—84

© Издательство „Недра“, 1984

ПРЕДИСЛОВИЕ

Механика, древнейший раздел физики, по сей день остается основой прогресса современной техники, что особенно ясно видно на примере нефтяной и газовой промышленности. Почти все технологические процессы этих отраслей народного хозяйства, начиная с бурения скважин и кончая транспортированием добытой продукции по магистральным нефте- и газопроводам, являются механическими по своей природе. Центральное место в технологическом цикле занимают процессы разработки нефтяных месторождений.

Использование научных методов для совершенствования технологии — давняя традиция нефтяной и газовой промышленности. Основоположниками углубленного приложения механики к нефтяному делу в нашей стране были В. Г. Шухов и Л. С. Лейбензон, труды которых составляют предмет справедливой гордости отечественной технической мысли.

В наше время существенно увеличились масштабы добычи нефти и газа и вводятся в разработку месторождения со сложными физико-геологическими условиями, решается важнейшая проблема увеличения полноты извлечения нефти из недр. В связи с этим значительно повысился уровень требований к пониманию того, как движутся в пластах насыщающие их жидкости — нефть, газ и вода.

Теории движения жидкостей и газов в природных пористых средах (подземной гидродинамике) посвящено много книг. Предлагаемая книга их не повторяет — со временем не только накапливаются новые результаты и появляются новые направления, но и смещаются акценты даже в классических разделах. Авторы стремились показать в книге естественную связь классических и современных разделов подземной гидродинамики.

Книга адресована тем нефтяникам и специалистам газовой промышленности, которые ведут исследовательскую работу или готовятся к ней и испытывают при этом необходимость более широко использовать модели и методы современной механики сплошных сред. Вместе с тем, учитывая все возрастающий интерес к нефтяной и газовой проблематике со стороны математиков, механиков и физиков, авторы стремились сделать книгу полезной и для них.

Решение практических задач современной нефтяной и газовой технологии требует использования и разработки самых современных теоретических построений. Поэтому основное внимание в книге уделено постановке принципиальных задач подземной гидродинамики, ее идеям и методам. Авторы надеются, что отбор материала по этим принципам будет полезен специалистам и поможет начинающим исследователям быстрее приступить к самостоятельной работе в этой увлекательной области, в которой практическая

полезность неразрывно сочетается с подлинной научной красотой. Очень поучительно и то обстоятельство, что именно в подземной гидродинамике наиболее отчетливо прослеживаются и доводятся до обозримых конечных результатов многие фундаментальные идеи и методы механики сплошных сред.

Авторы глубоко благодарны А. Ю. Ишлинскому и С. А. Христиановичу за постоянное внимание к их исследованиям, нашедшим отражение в предлагаемой книге. Они с благодарностью вспоминают свои многочисленные беседы с учеными-нефтяниками, в первую очередь А. П. Крыловым, И. А. Чарным, А. Х. Мирзаджанзаде, Ю. В. Желтовым, оказавшие влияние на предмет их интереса в подземной гидродинамике. Авторы благодарны всем, кто своими советами и критикой способствовал улучшению книги, и особенно Ю. П. Желтову и А. Ф. Зазовскому, сделавшим ценные замечания по рукописи. И. А. Викторову и Л. Г. Фадееву авторы благодарят за помощь в оформлении рукописи и подготовке ее к печати.

По ограничениям технического характера авторы смогли процитировать лишь малую долю исследований, безусловно заслуживающих упоминания. Авторы сознают неполноту книги в этом отношении и приносят читателям свои извинения.

Авторы будут признательны читателям за замечания по книге. Отзывы просим направлять по адресу: 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19, издательство «Недра».

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ

§ 1. Особенности теории движения жидкости и газа в природных пластах

Месторождения нефти и природного газа чаще всего приурочены к поднятиям или складкам пластов терригенных и карбонатных осадочных пород (песчаников, известняков, алевролитов, глин), представляющих собой скопления зерен минералов, связанных цементирующим материалом и преобразованных в результате геологических процессов.

Поровое пространство терригенных пород — сложная нерегулярная система сообщающихся (иногда — изолированных) межзеренных пустот с размерами пор, составляющими единицы или десятки микрометров (рис. 1).

В карбонатных породах (известняках, доломитах) система пор более неоднородна, кроме того, гораздо более развита система вторичных пустот, возникших после образования самой породы. Сюда относятся трещины, вызванные тектоническими напряжениями, а также каналы и каверны, возникшие благодаря растворению скелета породы водой (иногда сопровождающемуся химической реакцией). Протяженность трещин и размеры каверн могут намного превосходить размеры первичных пор.

Жидкие или газообразные углеводороды, плотность которых меньше плотности воды, скапливаются в поднятиях («ловушках») пород, вытесняя ранее находившуюся там воду. Чтобы месторождение нефти или газа могло сохраниться, пласты-коллекторы должны быть изолированы от выше- и нижележащих проницаемых пластов кровлей и подошвой: слоями непроницаемых пород, чаще всего глин или соли (рис. 2).

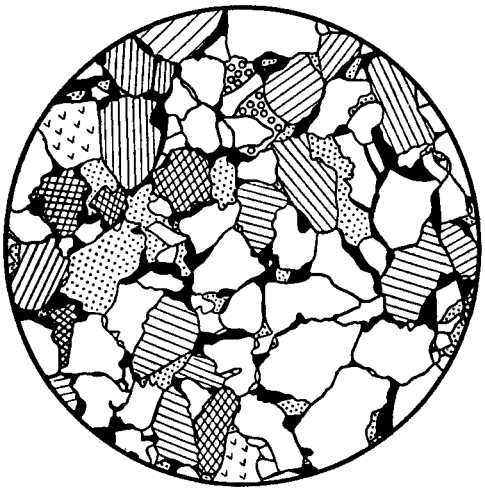
Строение нефтяных и газовых залежей осложняется значительной неоднородностью и прежде всего многослойностью слагающих их пород. Нефте- и газоносные пласты часто пересекаются крупными тектоническими нарушениями — разрывами сплошности пород. Добыча нефти и газа, разведка месторождений и исследование пластов ведутся через отдельные скважины диаметром 10—20 см, отстоящие друг от друга на сотни метров.

Мы напомнили эти общеизвестные факты, чтобы подчеркнуть вытекающие из них особенности теории фильтрации нефти и газа в природных пластах. Одна из них заключается в необходимости

одновременно рассматривать процессы в областях, характерные размеры которых различаются на порядки: размер пор (единицы и десятки микрометров), диаметр скважин (десятки сантиметров), толщины пластов (единицы и десятки метров), расстояния между скважинами (сотни метров), протяженность месторождений (до десятков и даже сотен километров). Кроме того, неоднородность пластов (по толщине и площади) имеет характерные размеры практически любого масштаба.

Сведения о пласте при всем их разнообразии всегда ограничены. Они складываются из геологической и геофизической информации: данных исследования образцов породы и гидродинамических исследований скважин, результатов анализа отобранных из скважин проб нефти, газа и пластовой воды; и, наконец, из истории разработки, т. е. совокупности данных по динамике изменения давлений, отбора или закачки нефти и воды по отдельным скважинам и в целом по объекту. Даже если имеется весь перечисленный объем информации, что бывает далеко не всегда, ее недостаточно для однозначного построения модели пласта. Это ясно хотя бы из того, что любая модель строится на интерполяции по пласту данных, полученных на основе единичных скважинных измерений, и обычно нет веских оснований считать это адекватным представлением того, что на самом деле происходит в пласте. В этих условиях основная задача исследования заключается в установлении качественных закономерностей, устойчивых тенденций, а также количественных соотношений, устойчивых к вариации исходных данных. Целью расчета оказывается не столько точное определение всех характеристик процесса, сколько расширение той совокупности сведений, которые учитываются при выборе, например, системы разработки месторождения или метода воздействия на пласт. Последующее поведение пласта позволяет внести коррективы и уточнить принятую модель.

РИС. 1. Шлиф нефтяного песчаника



Все это сближает подземную гидродинамику с теоретической физикой. Решающую роль играет постановка задачи и такой анализ результатов ее решения, который позволяет сделать некоторые общие, скорее, качественные, заключения. Напротив, увеличение точности качественно ясных результатов оказывается зачастую ненужным.

Такое положение дел существовало всегда, и появление и широкое распространение вычислительных

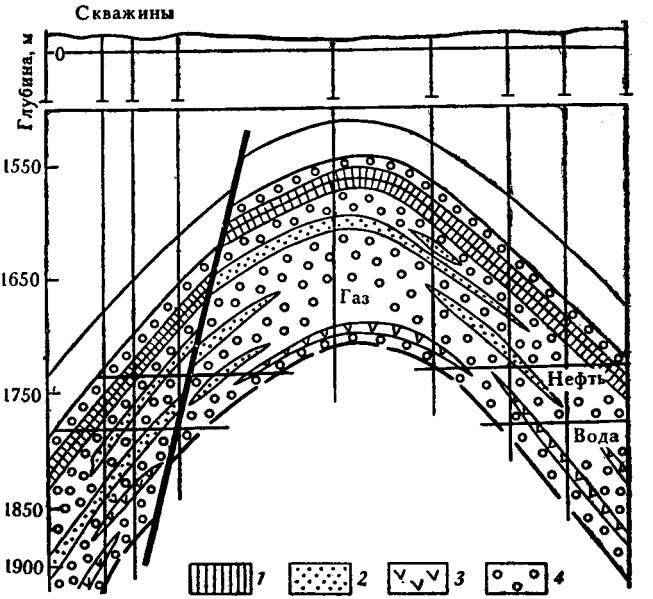


РИС. 2. Схема залежи нефти и газа:
1 — глины; *2* — глинистые песчаники; *3* — плотные прослои; *4* — пески, песчаники

машин лишь усугубило его. С помощью машинной математики многие технические трудности были преодолены, в результате чего возможности гидродинамических расчетов неизмеримо выросли. Однако познавательная ценность извлекаемых результатов еще более чем в домашинную эру определяется адекватностью модели, четкостью постановки задачи расчета и глубиной предварительного анализа имеющихся данных.

§ 2. Пористые среды

Движение жидкостей, газов и их смесей в пористых средах составляет предмет изучения особого раздела гидродинамики — подземной гидродинамики (теории фильтрации).

Сложный и нерегулярный характер структуры порового пространства не позволяет изучать движение жидкости и газов в нем обычными методами гидродинамики, т. е. путем решения уравнений движения вязкой жидкости для области, представляющей собой совокупность всех пор. Действительно, простая оценка показывает, что если бы мы хотели построить такое решение, то оказалось бы невозможным записать граничные условия даже для небольшого месторождения. Однако в такой записи и таком решении нет необходимости: с увеличением числа отдельных микродвижений, составляющих макроскопическое фильтрационное движение, начинают проявляться суммарные статистические закономерности, характерные для движения в целом и несправедливые для одного или нескольких поровых каналов. Это характерно для систем с большим числом однородных элементов, слабо связанных между

собой. Такие системы могут быть описаны как некоторые сплошные среды, свойства которых не выражаются непосредственно через свойства составляющих элементов, а являются осредненными характеристиками достаточно больших объемов среды.

Так, в гидродинамике не изучается движение отдельных молекул, а вводятся некоторые осредненные динамические характеристики жидкости как сплошной среды и рассматриваются только объемы жидкости, размеры которых достаточно велики по сравнению с межмолекулярными расстояниями, чтобы в любом элементе содержалось достаточно большое число молекул и было бы возможно использование осредненных характеристик [1].

Аналогично этому теория фильтрации строится на представлении о том, что пористая среда и заполняющая ее жидкость образуют сплошную среду. Это означает, что элементы системы жидкость — пористая среда, которые считаются физически бесконечно малыми, все же достаточно велики по сравнению с размерами пор и зерен пористой среды; только для объема, в котором заключено большое число пор и зерен, достаточно представительны вводимые осредненные характеристики. В применении к меньшим объемам выводы теории фильтрации теряют силу.

С точки зрения теории фильтрации значение твердого скелета пористой среды прежде всего геометрическое, он ограничивает ту область пространства, в которой движется жидкость. Лишь в более специальных случаях, о которых будет сказано ниже, приходится рассматривать силовое взаимодействие между скелетом и прилежащими к нему слоями жидкости. Поэтому свойства пористой среды в теории фильтрации описываются некоторым набором геометрических средних характеристик.

Важнейшая характеристика элемента пористой среды — ее пористость m, равная отношению объема $V_п$, занятого в выделенном элементе порами, к общему объему элемента V:

$$m = V_п/V. \tag{I.1}$$

Соотношением (I.1) определяется средняя пористость данного элемента. Выбрав некоторую точку пористой среды, окружая ее элементами все меньшего объема, можно найти локальную пористость как предельное значение при стягивании объема. Существенно, что это — «промежуточный» предельный переход: при «стягивании» размеры элемента должны оставаться бóльшими по сравнению с микромасштабом пористой среды (размером пор или зерен). Ситуация здесь вполне аналогична положению в других разделах механики сплошной среды; так, при определении локальной плотности газа размер объема всегда выбирается бóльшим по сравнению с длиной свободного пробега.

[1] Как известно из теории вероятностей, чем больше число одинаково распределенных случайных величин, образующих некоторую совокупность, тем меньше вероятность отклонения среднего по совокупности значения параметра для данной реализации от наиболее вероятного значения. Тем самым указанные ниже требования делают интегральные характеристики движения достаточно устойчивыми.

Обычно различают полную пористость, когда учитываются все поры, и активную, когда учитываются лишь те, которые входят в единую систему соединенных между собой пор и могут быть заполнены жидкостью извне. Для наших целей существенна, естественно, лишь активная пористость, поэтому в дальнейшем под пористостью понимается именно она. Наряду с пористостью m иногда вводится понятие просветности n — отношения площади активных пор в любом сечении, проходящем через данную точку, ко всей площади сечения. Легко убедиться, что в сделанных предположениях просветность в данной точке не зависит от выбора направления сечения и равна пористости m.

Пористость одинакова для геометрически подобных сред и не характеризует размеров пор. Поэтому для описания пористой среды необходимо также указать некоторый характерный размер порового пространства d. Имеется много по существу равноценных способов определения этого размера. Естественно, например, за характерный размер d принимать некоторое среднее значение радиуса порового канала l или отдельного зерна пористого скелета (понимаемые как средние значения соответствующих случайных величин).

Кривые распределения размеров пор или зерен содержат значительно больше информации о микроструктуре пористой среды, чем просто средние значения. Поэтому предпринимались многочисленные попытки определения всех геометрических и гидродинамических характеристик пористой среды на основе кривых распределения. Однако зависимости гидродинамических характеристик пористой среды от параметров кривых распределения не могут быть универсальными — одинаковыми для разных пород. Действительно, вводя, например, тонкие непроницаемые перегородки, можно коренным образом изменить гидродинамические характеристики среды, не изменив либо слабо изменив вид кривых распределения. В то же время для различных процессов существенны разные статистические характеристики размеров пор и зерен. Так, для процессов переноса в пористой среде существенна степень неоднородности составляющих пористой среды — пор и зерен. В этом случае наряду со средним значением размера существенна и его дисперсия, характеризующая степень отклонения от среднего значения.

§ 3. Закон Дарси, пределы его применимости и уточнения

Основная характеристика фильтрационного движения — вектор скорости фильтрации $\boldsymbol{u}$ — определяется следующим образом. Выберем точку M пористой среды и проведем через нее произвольную элементарную площадку ΔS с нормалью $\boldsymbol{n}$. Через выделенную площадку в единицу времени протекает масса жидкости ΔQ. Тогда проекция вектора $\boldsymbol{u}$ на нормаль $\boldsymbol{n}$ к выделенной площадке равна пределу отношения $\Delta Q/\rho\Delta S$ при $\Delta S \to 0$. Здесь ρ — плотность жидкости

Подчеркнем, что предел понимается в указанном выше «промежуточном» смысле и что масса жидкости делится на полную площадь ΔS, а не на ее часть, занятую порами.

Основное соотношение теории фильтрации — закон фильтрации — устанавливает связь между вектором скорости фильтрации и тем полем давления, которое вызывает фильтрационное движение. Здесь и далее, если не оговаривается специально противное, под давлением понимается разность между полным давлением и гидростатическим; в отсутствие движения давление жидкости в порах распределено по гидростатическому закону. Как только начинается движение, избыточное (над гидростатическим) давление становится переменным по пространству. Движение жидкости в пористой среде отличается от движений, рассматриваемых в обычной гидродинамике, тем, что в любом макрообъеме имеется неподвижная твердая фаза, на границе с которой жидкость также неподвижна. Поэтому система поровых каналов элементарного макрообъема гидродинамически эквивалентна системе сложным образом связанных труб. Скорость фильтрации характеризует расход через эту систему. С другой стороны, расход определяется давлениями на входах и выходах поровых каналов. Поскольку расход представляет собой суммарную по многим поровым каналам величину, он определяется перепадом, т. е. градиентом осредненного давления жидкости.

Именно поэтому, в отличие от уравнений обычной гидродинамики, в теории фильтрации существует локальная зависимость между градиентом давления и вектором скорости фильтрации.

Некоторые сведения о форме закона фильтрации, связывающего скорость фильтрации и градиент давления, можно получить, исходя из самых общих представлений. Пористая среда описывается геометрическими параметрами — характерным размером d и некоторыми безразмерными величинами: пористостью m, параметрами кривой распределения и др. Закон фильтрации должен следовать из уравнений движения жидкости в поровом пространстве, поэтому система определяющих величин включает также те характеристики жидкости, которые входят в эти уравнения: плотность ρ и вязкость μ. Таким образом, мы ищем форму зависимости градиента давления $\operatorname{grad} p$ от вектора скорости фильтрации $\boldsymbol{u}$, геометрических характеристик пористой среды m, d и т. д. и характеристик жидкости ρ и μ. Среди величин, от которых зависит $\operatorname{grad} p$, только скорость фильтрации $\boldsymbol{u}$ является вектором. В силу изотропии среды вектор $\operatorname{grad} p$ должен быть направлен по одной прямой с вектором $\boldsymbol{u}$. В самом деле, пусть вектор $\operatorname{grad} p$ составляет отличный от нуля угол с направлением вектора $\boldsymbol{u}$. Если повернуть выбранную произвольную систему координат вокруг вектора $\boldsymbol{u}$ на некоторый угол, то ни этот вектор, ни какой-либо другой из определяющих параметров не изменятся. Следовательно, не должен измениться и вектор $\operatorname{grad} p$, зависящий только от этих параметров. Но если $\operatorname{grad} p$ составляет отличный от нуля угол с направлением вектора $\boldsymbol{u}$, то при повороте его направление

относительно координатных осей обязательно должно измениться. Отсюда вытекает, что направления векторов $\boldsymbol{u}$ и grad p должны совпадать, так что

$$\operatorname{grad} p = -c\boldsymbol{u}, \tag{I.2}$$

где c — некоторая скалярная величина, зависящая от модуля вектора скорости u, а также величин d, m, ρ, μ.

Рассмотрим фильтрационные движения, когда несущественны силы инерции. К числу подобных безынерционных движений принадлежит большинство фильтрационных течений, встречающихся на практике, поскольку они происходят медленно. При этом плотность ρ, характеризующая инерционные свойства жидкости, несущественна и исключается из числа определяющих параметров. Таким образом, при безынерционных движениях величина c зависит только от u, d, m и μ. Выпишем размерности интересующих нас величин:

$$[m] = 1;\ [c] = ML^{-3}T^{-1};\ [u] = LT^{-1};\ \ [d] = L;\ \ [\mu] = ML^{-1}T^{-1}. \tag{I.3}$$

Из четырех определяющих параметров три (u, d и μ) имеют независимые размерности. Тогда, согласно анализу размерностей, безразмерная комбинация cd^2/μ может зависеть только от единственной безразмерной величины среди определяющих параметров — пористости m:

$$cd^2/\mu = f(m);\ \ c = d^{-2}\mu f(m). \tag{I.4}$$

После этого уравнение (I.2) можно представить в виде

$$\operatorname{grad} p = -\mu d^{-2} f(m)\,\boldsymbol{u};\ \ \boldsymbol{u} = -(k/\mu)\operatorname{grad} p;\ \ k = d^2/f. \tag{I.5}$$

Соотношение (I.5) описывает закон фильтрации Дарси (по имени французского инженера А. Дарси, установившего его экспериментально в 1856 г.). Величина k называется п р о н и ц а е м о с т ь ю (имеет размерность площади, не зависит от свойств жидкости и является чисто геометрической характеристикой пористой среды).

Если вместо p рассматривать истинное давление в жидкости $P = p - \rho gz$, где g — ускорение свободного падения, z — высота рассматриваемой точки над некоторым расчетным уровнем, то (I.5) можно записать в виде

$$\boldsymbol{u} = -(k/\mu)\operatorname{grad}(P + \rho gz). \tag{I.6}$$

В гидротехнических расчетах обычно используется напор $H = p/\rho g$, тогда имеем

$$\boldsymbol{u} = -C\operatorname{grad} H,\ \ C = k\rho g/\mu, \tag{I.7}$$

где C — коэффициент фильтрации, имеет размерность скорости.

Как видно из приведенного вывода, закон Дарси — следствие предположения о безынерционности движения жидкости. Фильтрационное течение, подчиняющееся закону Дарси,— частный случай ползущего течения, для которого характерно преобладание вязких сил над инерционными (т. е. числа Рейнольдса очень малы — $\mathrm{Re} \ll 1$). Поэтому попытки вывода закона Дарси путем

осреднения уравнений гидродинамики сводятся к вычислению проницаемости по задаваемой геометрической структуре пористой среды.

Чаще всего из формул этого типа используется уравнение Козени — Кармана, полученное на основе аналогии между пористой средой и системой параллельных трубок, выражающее проницаемость через удельную поверхность Σ и пористость m:

$$k = Km^3\Sigma^{-2}. \tag{I.8}$$

Постоянная K определяется по опытным данным и оказывается разной для пористых сред различной структуры. Формулу (1.8) используют главным образом в расчетах фильтрационных сопротивлений искусственных пористых сред, применяемых в химических аппаратах, а также при определении удельной поверхности порошков.

До сих пор предполагалось, что пористая среда изотропна. Для природных пластов часто характерна анизотропия, связанная либо с естественной слоистостью (для осадочных пород), либо с развитием систем параллельных микротрещин, вызванных напряжениями в породе. Если пористая среда не изотропна, то в произвольной ортогональной декартовой системе координат x_1, x_2 и x_3 компоненты вектора $\operatorname{grad} p$ выражаются через компоненты u_i вектора $\boldsymbol{u}$ следующим образом:

$$\partial p/\partial x_i = -c_{i\alpha}u_\alpha, \tag{I.9}$$

где c_{ij} — некоторый тензор (предполагается суммирование по всем значениям повторяющихся греческих индексов, так что $c_{i\alpha}u_\alpha$ означает $c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + c_{13}u_3$). В случае безынерционных движений компоненты тензора c_{ij} могут зависеть только от вязкости жидкости μ и тех или иных геометрических характеристик пористой среды.

Аналогично выводу формулы (I.9) можно показать, что $c_{ij} = \mu r_{ij}$, где r_{ij} — тензор удельных фильтрационных сопротивлений, который зависит только от геометрических характеристик пористой среды. Компоненты его имеют размерность, обратную размерности площади. Выражая компоненты вектора скорости через компоненты вектора градиента давления, получаем

$$u_i = -(k_{i\alpha}/\mu)\,\partial p/\partial x_\alpha, \tag{I.10}$$

где k_{ij} — тензор проницаемости, обратный тензору r_{ij}, зависит только от геометрических характеристик пористой среды и имеет размерность площади. Зависимость (1.10) описывает закон Дарси для анизотропной пористой среды.

Тензоры сопротивлений r_{ij} и проницаемости k_{ij} симметричны[1].

Если анизотропия пористой среды связана с естественной слоистостью, проницаемость вдоль слоев имеет одно значение, а в перпендикулярном направлении — другое, обычно значительно

[1] Это следует из того, что квадратичная форма $r_{\beta\alpha}u_\beta u_\alpha$, пропорциональная удельной работе сил взаимодействия жидкости с пористой средой, не должна зависеть от выбора системы координат.

меньшее. Поэтому одна из главных осей тензора проницаемости — x_3 перпендикулярна плоскости напластования, а две другие — x_1 и x_2 можно выбрать произвольно в плоскости напластования. Система x_1, x_2, x_3 будет главной в каждой точке пористой среды; при этом имеем

$$k_{11} = k_{22} = k; \quad k_{33} = k_0; \quad k_{ij} = 0 \quad (i \neq j). \tag{I.11}$$

Закон Дарси в выбранной системе координат записывается в силу соотношений (I.11) следующим образом:

$$u_1 = -(k/\mu)\,\partial p/\partial x_1; \quad u_2 = -(k/\mu)\,\partial p/\partial x_2; \quad u_3 = -(k_0/\mu)\,\partial p/\partial x_3.$$

При значительных скоростях, когда уже нельзя не учитывать инерционной составляющей сопротивления движению жидкости, предпосылки, заложенные при выводе закона Дарси, перестают быть справедливыми. К числу определяющих параметров следует добавить плотность ρ с размерностью ML^{-3}. Тогда коэффициент c в (1.2) будет зависеть уже от пяти величин, из которых можно образовать две безразмерные комбинации, что дает

$$\operatorname{grad} p = -(\mu/k)\,\boldsymbol{u}\,g\,(u\rho d/\mu,\ m). \tag{I.12}$$

Комбинация $u\rho d/\mu = \mathrm{Re}$ представляет собой число Рейнольдса для фильтрационного микродвижения. Предполагая, что функция $g(\mathrm{Re})$ разлагается в степенной ряд, и ограничиваясь первыми двумя членами, получим уравнение двучленного закона фильтрации:

$$-(k/\mu)\operatorname{grad} p = \boldsymbol{u} + \beta k^{1/2}\mu^{-1}\rho u\boldsymbol{u}. \tag{I.13}$$

Здесь в качестве характерного размера d принята величина $k^{1/2}$ и учтено, что при $u \to 0$ должен быть справедлив закон Дарси. Двучленный закон фильтрации впервые был предложен Форхгеймером. Формула (I.13) хорошо описывает данные наблюдений даже для весьма больших значений чисел Рейнольдса. Так, для несцементированных (насыпных) пористых сред этот закон справедлив вплоть до чисел Рейнольдса порядка 10—100, тогда как отклонения от линейного закона начинаются при $\mathrm{Re} \sim 0{,}1-1{,}0$. Неоднократно делались попытки выбрать характерный размер d таким образом, чтобы процесс фильтрации в пористых средах различной структуры описать единой формулой. Оказалось успешным введение в качестве характерного размера величины $(k/m)^{1/2}$, предложенное М. Д. Миллионщиковым. Тогда число Re оказывается равным $\rho u k^{1/2} m^{3/2}/\mu$.

При этом удается единообразно описать закон фильтрации во многих средах различной проницаемости. Для несцементированных пористых сред коэффициенты двучленного закона фильтрации (I.13) можно записать в виде

$$\alpha = A\,(1-m)^3\,m^{-3}/D, \quad \beta = B\,(1-m)\,m^{-3}/D.$$

Здесь D — средний размер зерен породы, A и B — значения коэффициентов, близкие к постоянным для отдельных групп несцементированных сред, но они зависят, например, от формы зерен.

Поэтому и такая форма записи двучленного закона не является универсальной.

Появление квадратичного члена в уравнении закона фильтрации до сих пор иногда объясняют турбулизацией течения. Однако порядок критических чисел Рейнольдса в теории фильтрации (0,1—10), рассчитанных по диаметру зерен или пористой среды, указывает на неправильность такого утверждения. Отсутствие турбулентности (т. е. флуктуаций скорости во времени) доказано и прямыми экспериментами. Этот неправильный взгляд обусловлен тем, что в гидравлике круглых цилиндрических труб отклонение от линейной зависимости обязательно связано с турбулизацией потока, но это не так даже для ламинарного течения в криволинейных трубах.

В задачах теории фильтрации нефти и газа в природных пластах применение двучленного закона ограничено движением в прискважинной зоне высокодебитных скважин и фильтрацией в трещиноватых средах. Кроме нарушений закона Дарси, связанных с проявлением инерционных сил, линейный закон фильтрации может нарушаться при очень малых скоростях, когда проявляются аномальные реологические свойства движущихся жидкостей. Эти вопросы будут рассмотрены в гл. III.

§ 4. Уравнение неразрывности и основные уравнения теории фильтрации

Система уравнений общей гидродинамики состоит из уравнений сохранения массы, импульса и энергии и уравнений состояния. При движении жидкостей и газов в пористой среде уравнение сохранения импульса сводится к формуле закона фильтрации. Уравнение энергии существенно лишь в тех случаях, когда нельзя пренебрегать изменением температуры. В последующем, кроме специально оговоренных случаев, принимается условие постоянства температуры $T=\text{const}$ с учетом незначительности скоростей движения и высокой теплоемкости пород, окружающих проницаемые пласты. В связи с этим уравнения состояния сводятся к выражениям, связывающим при заданной температуре плотность жидкости и пористость среды с напряжениями в этой среде и давлением жидкости в порах. Запишем теперь уравнение неразрывности, выражающее условие сохранения массы жидкости при фильтрации.

Рассмотрим баланс массы жидкости в произвольном элементе объема пористой среды V, ограниченном поверхностью S, предполагая, что скоростью частиц твердого скелета можно пренебречь.

Приравнивая приращение массы жидкости в элементе V за время dt

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_V m\rho dV\right]dt \qquad \text{(I.14)}$$

притоку массы жидкости через поверхность элемента за то же время

$$-dt\int_S \rho \boldsymbol{u} n dS \tag{I.15}$$

и преобразуя поверхностный интеграл в объемный, получаем интегральное соотношение

$$\int_V \left(\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u})\right) dV = 0,$$

откуда в силу произвольности элемента V и непрерывности всех полей вытекает дифференциальное уравнение неразрывности

$$(m\rho)_{,t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0. \tag{I.16}$$

Окончательная формулировка большинства задач теории фильтрации заключается в составлении на основе уравнения неразрывности и закона фильтрации дифференциальных уравнений для распределения давления и в установлении соответствующих начальных и граничных условий. При составлении этих уравнений и формулировке задач необходимо знать зависимость от давления характеристик пористой среды и насыщающей ее жидкости.

Рассмотрим прежде всего влияние давления на свойства жидкости — плотность ρ и вязкость μ.

Для однородных капельных жидкостей — воды и нефти — изменения плотности в пластовых условиях обычно невелики: встречающиеся в фильтрационных движениях перепады давления (единицы МПа) весьма малы по сравнению с модулями объемного сжатия K_ρ капельных жидкостей ($5 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^3$ МПа). Поэтому обычно достаточно ограничиться линейной зависимостью

$$\rho(p) = \rho_0 [1 - (p - p_0)/K_\rho]. \tag{I.17}$$

Хотя сжимаемость капельных жидкостей мала, она играет значительную роль в тех случаях, когда возмущения давления захватывают обширные области (здесь существенно то, что нефтяные залежи обычно граничат с пластовой водой, суммарный объем которой значительно больше объема нефти в залежи; в результате этого за счет расширения воды со снижением давления может полностью компенсироваться извлекаемый объем нефти). Зависимостью вязкости капельных жидкостей от давления при изменении давления в тех же пределах можно обычно пренебречь[1].

Фильтрационные движения газа характеризуются тем, что ввиду больших абсолютных значений давления и перепадов газ часто нельзя считать идеальным. Уравнение состояния газа обычно записывается в виде:

$$\rho = p/z(p, T) RT. \tag{I.18}$$

Здесь $R = 8{,}314$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная.

[1] Сказанное не относится к нефти, находящейся в контакте с природным газом. В этом случае при повышении давления увеличивается количество растворенного в нефти газа, и ее вязкость заметно падает.

Преимущества такой записи связаны с тем, что для коэффициента сверхсжимаемости z (p, T) составлены таблицы и графики, охватывающие ряд практически важных случаев, и имеются простые способы приближенного вычисления его для газовых смесей. Отклонение z от единицы (отличие газа от идеального) значительнее для более тяжелых углеводородных газов.

Согласно кинетической теории газов, вязкость их не должна зависеть от давления. Это утверждение также неприменимо к условиям, характерным для газового пласта. При фиксированной температуре вязкость газа может изменяться на десятки процентов при изменении давления на единицы МПа.

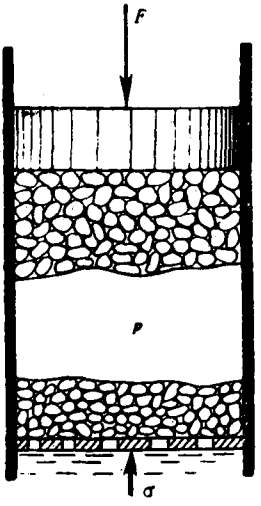
Чтобы проанализировать зависимость от давления свойств пористой среды — пористости и проницаемости, рассмотрим поведение насыщенного жидкостью образца при одноосном нагружении. Предположим, что нагрузка F на цилиндрический образец площадью поперечного сечения S, заключенный в непроницаемую оболочку, создается непроницаемым поршнем. Снизу на проницаемое основание действует давление p, равное давлению в жидкости (рис. 3). Тогда из условий равновесия образца в пренебрежении силами трения о боковые стенки следует

$$F = pS + F_1. \tag{I.19}$$

Здесь F_1 — сила, действующая на проницаемое основание. Очевидно, $F = \sigma S$, где σ — полное напряжение в насыщенном образце; $F_1 = \sigma^f S$, где σ^f — напряжение, воспринимаемое твердым скелетом (в расчете на всю площадь S). Из (I.19) получаем

$$\sigma^f = \sigma - p, \tag{I.20}$$

РИС. 3. Схема насыщенного образца пористой среды под нагрузкой



где σ^f — эффективное напряжение. Изменение пористости в условиях одноосного нагружения происходит под действием этого напряжения, вызывающего перестройку скелета пористой среды. Изменение пористости в зависимости от давления при фиксированной нагрузке, обусловленное сжимаемостью зерен, мало по сравнению со сжимаемостью пористой среды в целом, обусловленной переупаковкой зерен: жесткость материала зерен для таких сред, как песчаники и т. п., очень велика.

Аналогичные соображения применимы и в более общих случаях. Опытные данные, полученные в условиях произвольного нагружения пористого образца, позволяют определить зависимость пористости не от тензора истинных напряжений, действующих в скелете пористой среды, а от тензора эффективных напряжений. Так как при действии на пористую среду только приложенного внутри нее гидростатического давления касательные напряже-

ния не возникают, касательные компоненты тензора истинных напряжений и тензора эффективных напряжений совпадают, а нормальные компоненты отличаются на величину p. Поэтому имеем

$$\sigma^f_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}, \tag{I.21}$$

где σ^f_{ij}, σ_{ij} — соответственно компоненты тензора эффективных напряжений и тензора истинных напряжений ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Пористость и проницаемость как скалярные величины могут зависеть только от инвариантов тензора эффективных напряжений.

В линейном приближении зависимостью от второго и третьего инвариантов обычно пренебрегают, так что

$$m = m(\theta, p); \quad k = k(\theta, p); \quad \theta = (1/3)\,\sigma^f_{\alpha\alpha}. \tag{I.22}$$

Можно установить связь между средним нормальным эффективным напряжением θ и давлением, если рассмотреть напряженное состояние в пласте. Пусть H — глубина залегания пласта, h — его толщина, а ρ_0 — средняя плотность горных пород. Обычно толщина нефтяных пластов много меньше глубины их залегания, т. е. $h \ll H$. Вес горных пород, лежащих над пластом, уравновешивается системой напряжений в пористой среде и гидродинамическим давлением жидкости. Систему жидкость — пористая среда можно представить себе как некоторую деформируемую сплошную среду, в которой к нормальным напряжениям, действующим в пористой среде, добавляются нормальные напряжения, воспринимаемые жидкостью. Компоненты суммарного напряжения σ_{ij} выражаются с помощью соотношения (I.21)

$$\sigma_{ij} = \sigma^f_{ij} + p\delta_{ij}, \tag{I.23}$$

где δ_{ij} — единичный тензор.

Запишем уравнение равновесия системы жидкость — пористая среда с учетом силы тяжести в виде:

$$\partial\sigma_{i\alpha}/\partial x_\alpha + \rho g_i = \partial\sigma^f_{i\alpha}/\partial x_\alpha + \partial p/\partial x_i + \rho g_i = 0, \tag{I.24}$$

где ρ — суммарная плотность системы жидкость — пористая среда. Учитывая, что плотности слабосжимаемых горных пород и жидкости изменяются незначительно, а значение ее для газа по сравнению с твердым скелетом мало, в уравнении (1.24) можно положить $\rho = \text{const}$, т. е. это уравнение, не содержащее явно время. Суммарные напряжения на кровле и подошве пласта (т. е. на верхней и нижней ограничивающей пласт поверхностях) также можно считать не зависящими от времени. Физически обоснование последней гипотезы сводится к следующему. Если упругие постоянные пород пласта и кровли примерно одинаковы, смещение кровли, обусловливаемое изменением давления жидкости, насыщающей породу пласта и пропорциональное, очевидно, его толщине, распределяется на всю огромную толщу вышележащего

массива горных пород. Поэтому соответствующие относительные деформации в этом массиве малы и, следовательно, малы возникающие в нем дополнительные напряжения (в частности, напряжения на кровле и подошве пласта). Однако когда вышележащая толща в отличие от пород пласта сложена из очень жестких пород, при локальном понижении давления могут образоваться своды, и при изменении давления жидкости напряжения на кровле и подошве пласта будут меняться.

Поскольку уравнения равновесия системы жидкость — пористая среда и напряжения на кровле и подошве пласта не зависят от времени, суммарное напряженное состояние в системе жидкость — пористая среда (σ_{ij}) также оказывается не зависящим от времени. Поэтому

$$\partial \left(\sigma_{ij}^f + p\delta_{ij}\right)/\partial t = 0. \tag{I.25}$$

Полагая $i = j = 1, 2, 3$, имеем

$$\partial \left(\sigma_{11}^f + \sigma_{22}^f + \sigma_{33}^f + 3p\right)/\partial t = 0,$$

откуда вытекает важное соотношение

$$(\theta + p)_{,\,t} = 0, \quad \theta_{,\,t} = -p_{,\,t}. \tag{I.26}$$

Если первоначальное напряженное состояние, как это обычно можно предполагать для нефтяных и газовых пластов, и начальное давление постоянны по пласту, то из (1.26) следует

$$\theta + p = \text{const}. \tag{I.27}$$

Зависимость пористости и проницаемости пород-коллекторов от среднего нормального напряжения обычно определяется на приборах одноосного или двухосного сжатия. В дифференциальной форме эти зависимости можно выразить уравнениями

$$m_0^{-1} m_{,\,\theta} = -\varphi_1(\theta), \quad k_0^{-1} k_{,\,\theta} = -\varphi_2(\theta). \tag{I.28}$$

Таким образом, в условиях, когда справедливо соотношение (1.27), приращения пористости и проницаемости выражаются через приращения давления. (При этом учитывается и непосредственная зависимость пористости от давления, вызываемая сжимаемостью зерен твердого скелета.)

Рассмотрим случай фильтрации слабосжимаемой жидкости в упругодеформируемой однородной пористой среде, когда относительные изменения параметров этой среды и жидкостей малы. В этих условиях можно считать производные их по давлению постоянными

$$d\rho/dp = K_\rho^{-1}\rho_0; \quad dm/dp = K_m^{-1} m_0; \tag{I.29}$$

причем $(p - p_0)/K_m \ll 1$; $(p - p_0)/K_\rho \ll 1$ во всем диапазоне изменения давления. Значения K_ρ имеют порядок 10^4 МПа, K_m и K_k — от 10^3 до 10^4 МПа, а Δp (в задачах нестационарной фильтрации) —

от 0 до 20 МПа. Тогда из (I.16), пренебрегая малыми величинами, находим

$$m_0\left(\frac{1}{K_\rho}+\frac{1}{K_m}\right)\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{k_0}{\mu_0}\left[\Delta p+\left(\frac{1}{K_p}+\frac{1}{K_\mu}+\frac{1}{K_k}\right)(\operatorname{grad} p)^2\right]=0. \quad \text{(I.30)}$$

Если δp — характерное изменение давления, а L — характерная длина, то первый член в скобках имеет, очевидно, порядок $\delta p/L^2$, а второй $(\delta p)^2/L^2K$. Поскольку значение $\delta p/K$ мало, следует, что в принятом приближении вторым членом в квадратных скобках также следует пренебречь. Окончательно линеаризованное уравнение для давления (уравнение упругого режима или, по предложению В. Н. Щелкачева, уравнение пьезопроводности) имеет вид

$$p_{,\,t}=\varkappa\Delta p,\quad \varkappa=(k_0/m_0\mu_0)\,(1/K_m+1/K_\rho)^{-1}, \quad \text{(I.31)}$$

где Δ — символ оператора Лапласа; $\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности. Заметим, что в формулу для коэффициента пьезопроводности и в уравнение (I.31) не входит производная dk/dp, хотя проницаемость может в большей степени зависеть от давления, чем пористость. Такое кажущееся несоответствие объясняется тем, что проницаемость входит в уравнение множителем при членах первого порядка малости, а изменения пористости — с множителем порядка единицы. Зависимость проницаемости от давления может быть существенной для процессов, происходящих в призабойной зоне, где велики перепады давления, или для весьма длительных процессов.

ГЛАВА 2

КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Простейшие установившиеся напорные течения

Установившиеся течения несжимаемой жидкости, подчиняющиеся закону Дарси,— простейший класс движения в пористой среде. В то же время исследование этого класса движений чрезвычайно важно как для теории, так и для практики.

Различают напорное и безнапорное течения. В первом случае давление во всех точках выше атмосферного, пласт полностью насыщен жидкостью и поток в нем ограничен расположенными сверху и снизу непроницаемыми поверхностями — кровлей и подошвой. В случае безнапорного течения верхней границей потока или ее частью является свободная поверхность, давление на которой постоянно и равно атмосферному.

Установившаяся фильтрация несжимаемой ($\rho = \text{const}$) жидкости в однородной пористой среде описывается системой уравнений закона Дарси и неразрывности (I.5) и (I.16), которые в данном случае имеют вид

$$\boldsymbol{u} = -(k/\mu)\operatorname{grad}(p + \rho g z), \tag{II.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0. \tag{II.2}$$

Если ввести потенциал потока $\varphi = (k/\mu)(p + \rho g z)$, система (II.1)—(II.2) сводится к уравнению Лапласа для φ и связи между $\boldsymbol{u}$ и φ:

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad \boldsymbol{u} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{II.3}$$

Кратко рассмотрим вопрос о граничных условиях для уравнения (II.3). В задачах фильтрации жидкости в природных пластах встречаются три основных типа этих условий.

1. Условие на непроницаемых границах — для всех точек M границы Γ

$$u_n = 0 \quad \text{или} \quad \partial\varphi/\partial n = 0. \tag{II.4}$$

Здесь $\partial\varphi/\partial n$ — производная по нормали к границе Γ.

Непроницаемыми границами являются кровля и подошва, т. е. поверхности, отделяющие проницаемые пласты от вмещающих их непроницаемых пород (водоупоров), чаще всего глин или каменной соли. Существуют также и непроницаемые границы, секущие пласт вертикально или наклонно: изолирующие тектонические нарушения или поверхности выклинивания пластов.

2. Условие заданного постоянного напора. Пример его — условия на стенке скважины (поскольку предполагается, что скважина полностью заполнена жидкостью):

$$\varphi = \varphi_c = \text{const}; \quad r = r_c. \tag{II.5}$$

В ряде случаев оказывается более удобным задавать на скважине значение расхода, что (ввиду малости радиуса скважины r_c) эквивалентно заданию постоянной по периметру скважины нормальной составляющей скорости фильтрации жидкости через стенку скважины.

Реальные скважины не представляют собой идеальной цилиндрической поверхности, пересекающей пласт по всей его толщине. Часто вскрывается лишь часть толщины пласта (в этом случае скважины называются несовершенными по степени вскрытия). При этом граничные условия следует задавать на некотором фиктивном контуре, радиус которого (приведенный радиус) может быть значительно меньше истинного радиуса скважины.

Если скважина обсажена стальной или пластмассовой трубой, открытой для потока лишь в ряде перфорационных отверстий, то она называется несовершенной по характеру вскрытия. Для задания граничных условий на контуре такой скважины также приходится рассматривать условную скважину с приведенным радиусом, меньшим истинного. Наоборот, если вскрывается пласт, подвергшийся гидравлическому разрыву, то приведенный радиус становится большим истинного.

Иногда условие постоянного напора задается на так называемых дренажных галереях, т. е. поверхностях, перпендикулярных к направлению напластования, через которые жидкость отбирается из пласта или закачивается в него. Понятие дренажной галереи заимствовано из гидротехнических задач фильтрации. Применительно к напорному течению воды, нефти и газа в природных пластах дренажная галерея является условной схематизацией ряда (цепочки) скважин, обычно расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга по прямому, круговому или иному контуру. Некоторые соображения относительно возможности такой схематизации будут приведены ниже. Кроме дренажных галерей поверхностями постоянного напора моделируются в задачах фильтрации трещины, заполненные жидкостью.

Граничные условия постоянства напора ставятся и на контурах питания. Под контуром питания обычно понимается внешняя граница области фильтрации, через которую проникает жидкость. На этом контуре давление можно считать неизменным. С известным приближением понятие контура питания применимо к случаю, когда пласт имеет выход в какой-либо водоем — водохранилище, реку, море. Для нефтеносных пластов в качестве контура питания часто принимается граница внешней водоносной зоны с нефтеносной — водонефтяной контакт. Такая схематизация обоснована в случае, если проводимость водоносной зоны

много больше, чем нефтяной. В качестве контура питания в стационарном течении может также быть принята произвольная эквипотенциальная поверхность. Обычно положение контура питания по геологическим данным известно лишь грубо приближенно. Однако из дальнейшего будет видно, что для области со скважинами даже значительные ошибки в определении положения контура питания несущественно влияют на величину притока.

Условие третьего рода — связь давления на границе с нормальной составляющей градиента давления. Пусть, например, два высокопроницаемых пласта разделены слоем очень низкой проницаемости, и пусть при этом перепады давлений в проницаемых пластах по обе стороны границы и вдоль пласта одного порядка. Тогда, как нетрудно убедиться, составляющая скорости течения в проницаемых пластах вдоль напластования много больше поперечной составляющей. В малопроницаемом слое, наоборот, скорость будет направлена практически по нормали к границе, так как продольная составляющая градиента давления много меньше поперечной. Если давления в пластах по обе стороны границы равны p_1 и p_2, то скорость перетока жидкости из первого пласта во второй приближенно составит

$$w = (k^*/\mu\delta)(p_1 - p_2), \tag{II.6}$$

где k^* — проницаемость прослоя; δ — его толщина. Поскольку значение w равно нормальной составляющей скорости фильтрации во втором пласте, то можно записать

$$(k^*/\delta)(p_1 - p_2) = -k_2 \partial p_2/\partial n. \tag{II.7}$$

Если давление в первом пласте меняется мало, то во втором на малопроницаемой границе получаем условие третьего рода:

$$ap_2 + b\partial p_2/\partial n = c, \quad a^2 + b^2 > 0, \quad b/a \geqslant 0, \tag{II.8}$$

где a, b и c — постоянные.

Простейшим из фильтрационных течений является плоскопараллельный прямолинейный поток между двумя галереями с постоянным напором на каждой из них. Пусть течение направлено вдоль оси x, составляющей угол α к горизонту.

В этом случае потенциал φ и давление распределены по пласту линейно; при $x = 0$ (верхняя галерея) $p = p_1$, при $x = L$ (нижняя галерея) $p = p_2$. Тогда легко получить

$$(p_1 - p)/(p_1 - p_2) = x/L; \quad \varphi = (k/\mu)[p_1 - (p_1 - p_2)(x/L) + \rho g \sin\alpha], \tag{II.9}$$

$$u = -d\varphi/dx = (k/\mu)[(p_1 - p_2)/L - \rho g \sin\alpha]. \tag{II.10}$$

Соотношение (II.10) — интегральная форма записи закона Дарси. Оно используется в большинстве методов лабораторного измерения проницаемости.

Среди одномерных фильтрационных движений жидкости представляет интерес течение, происходящее в вертикальном направ-

лении под действием одной лишь силы тяжести, оно описывается следующим из (II.10) соотношением $\left(p_1 = p_2,\ \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$

$$u = -k\rho g/\mu. \tag{II.11}$$

Заметим, что в этом случае давление постоянно во всех точках потока.

Для широкого круга задач фильтрации в водоносных и нефтеносных пластах можно использовать двумерное приближение. Пусть кровля и подошва пласта горизонтальны, а скважины и контуры питания можно считать вертикальными поверхностями постоянного напора. Тогда, очевидно, напор во всех точках пласта не будет зависеть от вертикальной координаты, а направление потока будет горизонтальным. Эти условия сохраняются и для пласта, состоящего из ряда горизонтальных слоев разной проницаемости (но не зависящей от координат в горизонтальной плоскости). При этом напор во всех слоях вдоль вертикальной координаты будет одинаковым и, хотя горизонтальные составляющие скорости различны по слоям, вертикальные равны нулю. В этом случае движение с осредненной по толщине скоростью потока точно описывается двумерными уравнениями фильтрации. Как двумерное может рассматриваться и течение в наклонных пластах малой толщины.

В плоском стационарном потоке компоненты скорости и φ удовлетворяют системе уравнений закона Дарси и неразрывности:

$$u = -\partial\varphi/\partial x,\quad v = -\partial\varphi/\partial y,\quad \partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0. \tag{II.12}$$

Из последнего уравнения следует, что существует функция тока $\psi(x, y)$, такая, что

$$u = \partial\psi/\partial y,\quad v = -\partial\psi/\partial x. \tag{II.13}$$

Функции φ и ψ удовлетворяют соотношениям Коши — Римана

$$-\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y,\quad \partial\varphi/\partial y = \partial\psi/\partial x. \tag{II.14}$$

Это означает, что комплексный потенциал $W = \varphi + i\psi$ является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$. Производная dW/dz (комплексная скорость)

$$dW/dz = u - iv. \tag{II.15}$$

Введение комплексного потенциала позволяет решать большое число плоских задач теории фильтрации методами, основанными на теории функций комплексного переменного. Детальное изложение соответствующих методов можно найти в книгах [33, 34]. Напомним простейшие примеры, иллюстрирующие характерные черты плоских установившихся фильтрационных течений в пластах. Некоторые более общие свойства фильтрационных течений будут рассмотрены в следующем параграфе.

Комплексный потенциал плоскопараллельного прямолинейного течения с постоянной скоростью описывается формулой

$W = az + b$, где a и b — постоянные. Для другого варианта одномерного течения — радиального притока к источнику в начале координат выражение для комплексного потенциала имеет вид

$$W(z) = A \ln z + B. \tag{II.16}$$

Радиальная скорость $u_r = -\varphi_{,r} = Ar^{-1}$. При этом полный расход через скважину на единицу толщины не зависит от r и равен $u_r \cdot 2\pi r = q$. Тогда

$$A = -q(2\pi)^{-1}, \quad W = -(2\pi)^{-1} q \ln z + B. \tag{II.17}$$

При радиальном потоке от кругового контура питания ($r = R_к$) с потенциалом $\varphi_к$ к концентричной с ним скважине радиуса r с потенциалом $\varphi_с$ формула для вычисления дебита (расхода) скважины (формула Дюпюи) имеет вид

$$Q = qh = 2\pi h (\varphi_к - \varphi_с)/\ln (R_к/r_с) = 2\pi kh (p_к - p_с)/\mu \ln (R_к/r_с). \tag{II.18}$$

Радиус скважины всегда намного меньше радиуса контура питания и расстояния между скважинами. Поэтому при распределении давления по логарифмическому закону основная часть перепада давления между контуром питания и скважиной расходуется в узкой зоне вблизи скважины. Например, при $R_к = 100$ м, $r_с = 0{,}1$ м одна треть перепада расходуется в зоне радиусом 1 м и половина — в зоне радиусом 3 м. Отсюда следует особое значение проводимости призабойной зоны для притока жидкости к скважине.

Рассмотрим в связи с этим приток к скважине, вокруг которой имеется кольцевая зона радиуса r_0 с проницаемостью k_0, отличной от проницаемости внешней зоны пласта k_1. В каждой из зон поток радиальный. В этом случае справедливо выражение для потенциала (II.16). Используя условие равенства расходов и давлений на границе зон разной проницаемости, нетрудно получить следующие формулы для притока к скважине:

$$q = 2\pi k_1 (p_к - p_с)/\mu [\ln (R_к/r_0) + (k_1/k_0) \ln (r_0/r_с)] =$$
$$= 2\pi k_1 (p_к - p_с)/\mu \ln (R_к/r_с^*). \tag{II.19}$$

Здесь $r_с^*$ — приведенный радиус скважины,

$$r_с^* = r_с (r_с/r_0)^{\gamma - 1}, \quad \gamma = k_1/k_0.$$

В процессе бурения и эксплуатации скважины в результате присутствия в буровом растворе различных взвешенных частиц или твердых компонентов нефти проницаемость прискважинной зоны пласта часто оказывается пониженной. Поэтому, как видно из формулы (II.19), приведенный радиус скважины может оказаться на несколько порядков ниже истинного. Дебит скважины при одном и том же перепаде существенно снижается вследствие загрязнения призабойной зоны. Например, при десятикратном снижении проницаемости в зоне радиусом 0,5 м и радиусе скважины 0,1 м дебит снижается в 3 раза, а в зоне радиусом 0,2 м (т. е. толщиной всего в 0,1 м) — на 40 %.

Отсюда вытекают два важных практических следствия. Во-первых, необходимо тщательно очищать призабойную зону с целью сохранения естественного дебита скважины. Во-вторых, пользуясь формулой Дюпюи для расчета дебитов скважин и для определения параметров пласта по зависимости дебит — перепад давления, необходимо помнить об условности используемого в ней радиуса скважины. В то же время вследствие быстрого падения градиента давления при $|z| \to \infty$ даже заметная ошибка в определении радиуса контура питания ведет к не очень значительной ошибке в значении дебита.

Один из наиболее распространенных способов образования трещин в прискважинной зоне, применяемый для увеличения продуктивности скважин,— гидравлический разрыв пласта. Рассмотрим задачу о притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной. Предположим, что радиус трещины a намного больше радиуса скважины и что раскрытие трещины достаточно велико, чтобы давление в ней можно было считать равномерно распределенным. Искомый комплексный потенциал можно определить, отображая внешность отрезка оси x $[-a, +a]$ на внешность единичного круга на плоскости ζ. Это отображение дается функцией Жуковского

$$z = 2^{-1}a\,(\zeta + 1/\zeta); \quad \zeta = a^{-1}\left(z + \sqrt{z^2 - a^2}\right). \tag{II.20}$$

Тогда

$$W[\zeta(z)] = -(2\pi)^{-1}\,q \ln \zeta = -(2\pi)^{-1} q \ln\left[a^{-1}\left(z + \sqrt{z^2 - a^2}\right)\right]. \tag{II.21}$$

При $|z| \gg a$ справедливо асимптотическое представление

$$W \approx -(2\pi)^{-1} q\,[\ln(2z/a) - a^2/4z^2 + \ldots]. \tag{II.22}$$

Таким образом, с хорошим приближением окружности радиуса $R \gg a$ можно считать эквипотенциалями и рассматривать как условные контуры питания (точное решение задачи о притоке к вертикальной трещине с круговым контуром питания громоздко и практически не нужно). Из формул (II.21) и (II.22) можно получить следующее выражение для притока:

$$q = 2\pi k\,(p_к - p_с)/\mu \ln(2R/a), \tag{II.23}$$

т. е. в этом случае приведенный радиус скважины равен четверти длины трещин. Это указывает на высокую эффективность гидравлического разрыва пласта как средства интенсификации притока к скважине.

Линейность уравнений фильтрации позволяет широко применять при их решении принцип суперпозиции. Поскольку радиус $r_с$ мал по сравнению с расстоянием между скважинами, комплексный потенциал системы n скважин с центрами в точках z_i с дебитами q_i выражается суммой потенциалов отдельных скважин, рассматриваемых как изолированные источники:

$$W = -(2\pi)^{-1} \sum_{i=1}^{n} q_i \ln(z - z_i). \tag{II.24}$$

При этом на контуре каждой скважины сумма потенциалов остальных скважин практически постоянна, так как $r_c \ll |z_i - z_j|$.

Принцип суперпозиции позволяет решить большое число задач фильтрации в пластах с системой скважин. Например, нетрудно показать, что комплексный потенциал системы двух равнодебитных скважин, расположенных в точках $x = \pm 1$, $y = 0$,

$$W(z) = -(2\pi)^{-1} q \ln(z^2 - 1) \qquad \text{(II.25)}$$

описывает также приток к одиночной скважине, расположенной в точке с координатами $x = 1$, $y = 0$ вблизи непроницаемой границы ($x = 0$). Точно так же комплексный потенциал

$$W(z) = -(2\pi)^{-1} q \ln[(z-1)/(z+1)] \qquad \text{(II.26)}$$

соответствует не только течению между нагнетательной и добывающей скважинами равного дебита в тех же точках, но и притоку к скважине в точке с координатами $x=1$, $y=0$ от прямолинейного контура питания на прямой при $x = 0$.

Используя принцип суперпозиции, можно решить задачу о притоке к скважине, эксцентрично расположенной по отношению к круговому контуру питания. Пусть расстояние от центра кругового контура до скважины равно x_1, радиус контура питания $R_к$, радиус скважины r_c. Тогда

$$W = -(2\pi)^{-1} q \ln[(z - x_1)/(z - R_к^2/x_1)]. \qquad \text{(II.27)}$$

Отделяя действительную часть, получим на контуре питания и на скважине

$$\varphi_к = -(2\pi)^{-1} q \ln(x_1/R_к) + C,$$
$$\varphi_c = -(2\pi)^{-1} q \ln[r_c x_1/(R_к^2 - x_1^2)] + C, \qquad \text{(II.28)}$$

откуда нетрудно получить аналог формулы Дюпюи

$$q = 2\pi k (p_к - p_c)/\mu \ln[R_к (1 - x_1^2/R_к^2)/r_c]. \qquad \text{(II.29)}$$

Это выражение определяет приток к скважине, расположенной в центре кругового контура питания с приведенным радиусом, равным $R_к(1 - x_1^2/R_1^2)$. Можно убедиться, что эксцентричное расположение скважины мало отражается на дебите даже при значительном эксцентриситете. Например, при $R_к = 100$ м, $x_1 = 50$ м и $r_c = 0{,}1$ м дебит уменьшается всего лишь на 4,1 %. Это означает, что даже значительные ошибки в определении положения контура питания не очень существенно влияют на оценку дебита скважин. И хотя само представление о контуре питания лишь схематически описывает реальные условия в пласте, задание граничных условий на контуре для расчета дебитов оправдано.

При разработке нефтяных месторождений скважины по площади залежи часто располагаются рядами прямолинейной или круговой формы. При этом вблизи скважин направление течения близко к радикальному, а на расстояниях от них порядка расстояний

между скважинами эквипотенциалы почти параллельны рядам скважин. Это позволяет значительно упростить расчет дебитов скважин по заданным перепадам давлений. Для иллюстрации ограничимся одним примером прямолинейной цепочки равнодебитных скважин, расположенных вдоль оси Ox на расстоянии l друг от друга. В силу симметрии область течения можно разбить на элементы, имеющие вид полосы, параллельной оси y со скважиной в начале координат. Эти элементы разделяются линиями тока и поэтому изолированы друг от друга.

Комплексный потенциал цепочки источников имеет вид

$$W(z) = -(2\pi)^{-1} q \ln \sin(\pi z/l). \qquad (II.30)$$

Отделяя действительную часть выражения (II.30), получим

$$\varphi = -(4\pi)^{-1} q \ln [\operatorname{ch}^2(\pi y/l) - \cos^2 \pi x/l)] + C, \qquad (II.31)$$

где C — произвольная постоянная.

При $r = \sqrt{x^2 + y^2} \ll l$ (вблизи скважины), используя разложения функций $\operatorname{ch} t$ и $\cos t$ в степенные ряды, получим

$$\varphi \approx -(2\pi)^{-1} q \ln(\pi r/l) + O(r^2/l^2) + C. \qquad (II.32)$$

Таким образом, эквипотенциали, как и для изолированного источника, являются окружностями с центром на оси скважины. При $y \approx l$ и более второй член в квадратных скобках в формуле (II.31) при любых x много меньше первого, что позволяет положить

$$\varphi \approx -qy/2l + (2\pi)^{-1} q \ln 2 + C. \qquad (II.33)$$

Пусть контур питания совпадает с прямой $y = L > l$. С учетом (II.33) можно считать, что условие $\varphi = \text{const}$ на нем выполняется достаточно точно и решение описывается формулой (II.31). Тогда на скважине и на контуре питания имеем соответственно

$$\varphi_c = -(2\pi)^{-1} q \ln(\pi r_c/l) + C; \quad \varphi_к = -qL/2l + (2\pi)^{-1} q \ln 2 + C, \qquad (II.34)$$

откуда получим формулу для дебита

$$q = 2kl(p_к - p_c)/\mu [L + (l/\pi) \ln(l/2\pi r_c)]. \qquad (II.35)$$

Выражение (II.35) можно интерпретировать как формулу для двустороннего притока к участку галереи шириной l. Если рассматривать (II.35) как условие пропорциональности расхода и перепада давления, то, по Ю. П. Борисову, коэффициент

$$\mu L/k + (\mu l/k\pi) \ln(l/2\pi r_c) \qquad (II.36)$$

можно назвать полным фильтрационным сопротивлением, состоящим из «внешнего» сопротивления $\mu L/k$, определяющего приток к галерее, и «внутреннего» сопротивления $\frac{\mu l}{k\pi} \ln \frac{l}{2\pi r_c}$, добавленного за счет *искривления линий тока вблизи скважины.*

§ 2. Качественные методы теории напорных течений

Эффективные решения, подобные приведенным в предыдущем параграфе, можно получить лишь для фильтрационных течений в сравнительно простых областях. В других случаях расчет полей течения связан с большими трудностями. Заметим, однако, что в прикладных задачах представляют интерес не столько сами поля, сколько некоторые их интегральные характеристики, чаще всего дебиты при заданных перепадах давления. В теории напорной фильтрации можно установить несколько основных принципов, которые позволяют получать оценки для дебитов в областях сложной формы без вычислений. Изложим некоторые из этих принципов и продемонстрируем на примерах, как ими можно практически пользоваться.

Основная задача теории пространственных напорных стационарных течений состоит в отыскании поля давлений $p(\boldsymbol{x})$ в некоторой пространственной области D, внутри которой задано поле проницаемости $k(\boldsymbol{x})$, а на границе C области D задано либо давление p, либо нормальная составляющая скорости фильтрации u_n (поток жидкости). Будем считать, что на части границы C_p задано давление, а на C_q — поток:

$$p/C_p = P(\boldsymbol{x}), \quad u_n/C_q = -k(\partial p/\partial n)/C_q = q(\boldsymbol{x}). \tag{II.37}$$

Здесь $P(\boldsymbol{x})$, $q(\boldsymbol{x})$ — заданные функции. Внутри области D давление и скорость фильтрации удовлетворяют, как было показано выше, системе уравнений [1]:

$$\nabla \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{u} = -(k/\mu)\nabla p, \tag{II.38}$$

откуда можно получить уравнение для давления

$$\nabla(k\nabla p) = 0. \tag{II.39}$$

Вариационные принципы. Рассмотрим интеграл по области D

$$A = \int_D (\boldsymbol{v}\nabla\varphi)\,dV, \tag{II.40}$$

где $\boldsymbol{v}$ и φ — произвольные векторное и скалярное поля, обладающие достаточной гладкостью. Если векторное поле $\boldsymbol{v}$ соленоидальное, т. е. удовлетворяет условию $\nabla\boldsymbol{v} = 0$, то, используя формулу Остроградского — Гаусса, получим

$$A = \int_C (v_n\varphi)\,dS - \int_D \varphi\nabla\boldsymbol{v}\,dV = \int_C v_n\varphi\,dS. \tag{II.41}$$

В частности, подставляя p вместо φ и $\boldsymbol{u}$ вместо $\boldsymbol{v}$, получим

$$A = \int_D (\boldsymbol{u}\nabla p)\,dV = \int_C p u_n\,dS. \tag{II.42}$$

---

[1] В этом параграфе для сокращения записи используется оператор векторного дифференцирования набла: $\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi$, $\nabla\boldsymbol{u} = \operatorname{div}\boldsymbol{u}$.

Здесь $\int_C pu_n dS$ — работа, совершаемая в единицу времени внешними силами давления, на вдавливание жидкости внутрь выделенного объема.

Подынтегральное выражение в левой части уравнения (II.42) характеризует энергию, затрачиваемую на работу жидкости в единице объема среды на преодоление сил трения, и потому представляет собой плотность диссипации энергии — количество энергии, переходящее в тепло в единице объема пористой среды. В целом соотношение (II.42) выражает собой тождество полной диссипации: вся работа внешних сил над жидкостью в элементе пористой среды переходит в тепло. Это тождество верно для произвольного фильтрационного течения несжимаемой жидкости и для стационарных течений сжимаемой жидкости.

Определим для векторного поля $\boldsymbol{u}$ и скалярного поля p положительные функционалы X и Y:

$$X = \frac{1}{2}\int_D \mu k^{-1} u^2 dV; \quad Y = \frac{1}{2}\int_D k\mu^{-1} |\nabla p|^2 dV. \tag{II.43}$$

Можно установить следующие утверждения.

1. Из всех соленоидальных векторных полей $\boldsymbol{v}$, удовлетворяющих в точках части границы C_q условию

$$v_n|_{C_q} = q, \tag{II.44}$$

решение $\boldsymbol{u}$ («истинное поле скоростей фильтрации») выделяется тем, что минимизирует функционал

$$X^*[\boldsymbol{v}] = X[\boldsymbol{v}] + \int_{C_p} pv_n dS, \tag{II.45}$$

называемый полным потенциалом диссипации.

2. Из всех скалярных полей φ, удовлетворяющих условию на C_p

$$\varphi|_{C_p} = P, \tag{II.46}$$

решение p («истинное поле давлений») выделяется тем, что минимизирует функционал

$$Y^*[\varphi] = Y[\varphi] + \int_{C_q} \varphi q dS, \tag{II.47}$$

называемый полным дополнительным потенциалом диссипации.

Докажем первое из этих утверждений. Пусть $\boldsymbol{u}$ — решение, а $\boldsymbol{v}$ — произвольное поле, удовлетворяющее граничному условию (II.44) и условию соленоидальности. Тогда

$$\begin{aligned} X^*[\boldsymbol{v}] - X^*[\boldsymbol{u}] &= \frac{1}{2}\int_D (\mu/k)(v^2 - u^2)\, dV - \int_{C_p} p(v_n - u_n)\, dS = \\ &= \frac{1}{2}\int (\mu/k)(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u})\, dV - \int_{C_p} p(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\boldsymbol{n} dS \geqslant \\ &\geqslant \int_D (\mu/k)(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\, dV - \int_{C_p} p(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\boldsymbol{n} dS = \\ &= -\int_D (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\nabla p dV - \int_{C_p} p(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\boldsymbol{n} dS. \end{aligned} \tag{II.48}$$

Используя тождество (II.42), получим из (II.48):

$$X^*[\boldsymbol{v}] - X^*[\boldsymbol{u}] \geqslant \int_C p(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{n}dS -$$

$$-\int_{C_p} p(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{n}dS = \int_{C_q} p(\boldsymbol{v}-u)\,\boldsymbol{n}dS = 0. \qquad \text{(II.49)}$$

Тем самым мы показали, что истинное поле скоростей $\boldsymbol{u}$ минимизирует полный потенциал диссипации $X^*[\boldsymbol{v}]$. Точно так же доказывается, что истинное поле давлений p минимизирует полный дополнительный потенциал диссипации $Y^*[\varphi]$.

Следствия из вариационных принципов. Сформулированные вариационные принципы можно использовать для построения решений прямыми вариационными методами. Здесь же рассмотрено применение этих принципов для качественного исследования и построения оценок решений.

Прежде всего можно установить единственность решения задачи: допустив существование двух различных решений системы (II.38) при условиях (II.37), получим противоречивые неравенства

$$X^*[\boldsymbol{u}_1] \geqslant X^*[\boldsymbol{u}_2], \quad X^*[\boldsymbol{u}_1] \leqslant X[\boldsymbol{u}_2], \qquad \text{(II.50)}$$

откуда следует, что $X^*[\boldsymbol{u}_1] = X[\boldsymbol{u}_2]$. Но в силу рассуждений, подобных (II.48),

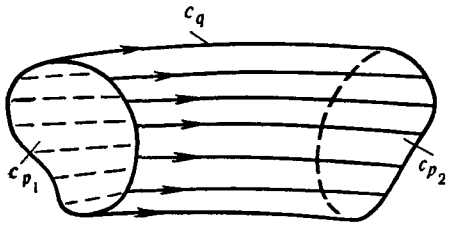
$$X[\boldsymbol{u}_1] - X[\boldsymbol{u}_2] = \frac{1}{2}\int_D (\mu/k)(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)^2 dV. \qquad \text{(II.51)}$$

Таким образом $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$ — решения совпадают.

Далее для давления справедлив принцип максимума: давление принимает свои наибольшее и наименьшее значения на границе области. Действительно, допустим, что в области D максимум давления P^* больше, чем на границе $P+$. Следовательно, максимальное давление достигается во внутренней точке области M^*. Тогда найдется внутренняя подобласть D_ε области D, содержащая точку M^*, на границе которой $p = P^* - \varepsilon$. Рассматривая решение уравнения (II.39) в подобласти D_ε и учитывая его единственность, найдем, что давление P постоянно по всей подобласти D_ε: $p = P^* - \varepsilon < P^*$. Это противоречит условию, что $p(M) = P^*$. Полученное противоречие и доказывает принцип максимума.

Из нашего рассуждения следует еще одно важное утверждение: поверхности постоянного давления (изобары) в стационарном фильтрационном потоке либо заканчиваются и начинаются в точках границы, либо — если они замкнуты — содержат внутри участок границы области (такое может быть только в том случае, если область движения многосвязна).

РИС. 4. Укрупненная трубка тока



Ограничимся в дальнейшем наиболее существенным для

практики случаем, когда область фильтрации представляет собой укрупненную трубку тока (рис. 4), т. е. ограничена непроницаемой боковой поверхностью C_q, на которой $u_n=0$, и двумя поверхностями постоянного давления C_1 и C_2 (вход и выход), на которых давление принимает значения P_1 и P_2, $P_1>P_2$ соответственно. Большинство задач, связанных с расчетом дебитов скважин и суммарных объемов отбора по месторождениям, принадлежит именно к этому классу. Разность $P=P_1-P_2$ будем называть перепадом давления на данной трубке тока, а полный поток жидкости через произвольное сечение трубки тока — расходом:

$$Q=-\int\limits_{C_1} u_n dS=\int\limits_{C_2} u_n dS. \tag{II.52}$$

Чаще всего нас интересует именно расходная характеристика фильтрационного потока — зависимость $Q(P)$ — или, поскольку она, очевидно, линейна — коэффициент расхода

$$\Lambda=Q/P=\text{const}. \tag{II.53}$$

Допустим, что найдено решение задачи теории фильтрации, т. е. поля $\boldsymbol{u}$ и p для трубки тока. Тогда имеем соотношения

$$Y^*[p]=\frac{1}{2}\int\limits_D (k/\mu)(\nabla p)^2 dV \equiv \frac{1}{2}\int \boldsymbol{u}\nabla\times p dV=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} u_n p dV=\frac{1}{2}(P_1-P_2)Q; \tag{II.54}$$

$$\Lambda=P^{-2}\int\limits_D (k/\mu)\,|\nabla p|^2 dV. \tag{II.55}$$

Далее, поскольку функции $\boldsymbol{u}$, p — решение задачи теории фильтрации, имеем

$$X^*[\boldsymbol{u}]=\frac{1}{2}\int\limits_D (\mu/k)\,u^2 dV+\int\limits_{C_p} p u_n dS=-\frac{1}{2}\int\limits_D (\boldsymbol{u}\nabla p)dV-$$

$$-(P_1-P_2)Q=-\frac{1}{2}(P_1-P_2)Q=\frac{1}{2}Q^2/\Lambda=-\frac{1}{2}\int\limits_D (\mu/k)\,u^2 dV, \tag{II.56}$$

так что

$$\Lambda=-\frac{1}{2}Q^2/X^*[\boldsymbol{u}]. \tag{II.57}$$

Соотношения (II.55) и (II.57) можно многими способами использовать для получения оценок коэффициента расхода, продуктивности Λ и доказательства общих утверждений относительно зависимости других величин от геометрических и физических параметров пласта.

Действительно, возьмем произвольное скалярное поле φ, удовлетворяющее условиям $\varphi|_{C_1}=1$, $\varphi|_{C_2}=0$, и произвольное соленоидальное векторное поле $\boldsymbol{v}$. Тогда в силу доказанных вариационных принципов

$$\Lambda=(\mu P^2)^{-1}\int\limits_D k\,|\nabla p|^2 dV=\mu^{-1}\Big|\int\limits_D k\,|\nabla(p/P)\Big|^2 dV=$$

$$=\mu^{-1}\min\int\limits_D k\,|\nabla\varphi|^2 dV\leqslant\mu^{-1}\int\limits_D k\,|\nabla\varphi|^2 dV. \tag{II.58}$$

Таким образом, из (II.55) следует неравенство (II.58) — оценка сверху для коэффициента продуктивности. С другой стороны, из вывода принципа минимума потенциала диссипации X^* следует, что, если рассматривать не все поля скорости, а только поля, отвечающие фиксированному расходу Q, то на них решение также минимизирует функционал X^* и, следовательно,

$$X^*[\boldsymbol{u}] = \frac{1}{2}\mu\int_D k^{-1}u^2dV - QP \leqslant \frac{1}{2}\mu\int_D k^{-1}v^2dV - QP, \qquad \text{(II.59)}$$

$$\frac{1}{2}\int_D k^{-1}u^2dV \leqslant \frac{1}{2}\int_D k^{-1}v^2dV; \quad Q[\boldsymbol{u}] = Q[\boldsymbol{v}].$$

Рассмотрим «нормированное» поле

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}/Q. \qquad \text{(II.60)}$$

Очевидно, этому полю будет соответствовать единичный расход, $Q[\boldsymbol{u}_0] = 1$, и в силу линейности задачи оно будет минимизировать интеграл

$$\frac{1}{2}\int_D k^{-1}v_0^2dV \qquad \text{(II.61)}$$

на всех соленоидальных векторных полях $\boldsymbol{v}_0$ с единичным расходом. Теперь имеем:

$$\Lambda = -\frac{1}{2}Q^2/X^*[\boldsymbol{u}] = \mu^{-1}Q^2/\int_D k^{-1}u^2dV = \mu^{-1}/\int_D k^{-1}u_0^2dV \geqslant$$

$$\geqslant \left[\mu\int_D k^{-1}v_0^2dV\right]^{-1}. \qquad \text{(II.62)}$$

Неравенства (II.58) и (II.62) позволяют получить строгие двусторонние оценки для коэффициентов продуктивности без фактического решения задачи (II.37) — (II.38). Чтобы сделать это, нужно взять произвольные пробные поля φ_0 и $\boldsymbol{v}_0$, удовлетворяющие условиям $\Delta\varphi_0 = 1$, $Q[\boldsymbol{v}_0] = 1$, $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0 = 0$, и вычислить для них интегралы $I_1[\varphi_0]$ и $I_2[\boldsymbol{v}_0]$. Тогда

$$I_2[\boldsymbol{v}_0] \leqslant \Lambda \leqslant I_1[\varphi_0]. \qquad \text{(II.63)}$$

Насколько удовлетворительной будет такая оценка, зависит от того, как удачно выбраны пробные функции φ_0 и $\boldsymbol{v}_0$. Ниже приведем примеры использования этого подхода для оценки дебитов скважин.

Вопрос об оценках коэффициентов продуктивности можно поставить и по-другому. Если область D имеет сложную форму и (или) распределение проницаемостей в ней является достаточно сложным, естественно ставить вопрос о том, что́ будет с дебитом (или коэффициентом продуктивности), если изменить форму области и (или) распределение проницаемости. На этом пути удается получить простые и вместе с тем важные вариационные оценки. Докажем, прежде всего, физически ясное утверждение, что если при фиксированной форме трубки тока и граничных условиях изменим поле проницаемостей k таким образом, что в каждой точке она не уменьшится (т. е. либо увеличится, либо останется

прежней), то при том же перепаде фильтрационный расход не уменьшится. Формально это сводится к тому, что рассматривается коэффициент продуктивности Λ как функционал от формы области D и от распределения в ней проницаемости и показывается, что этот функционал является монотонным по k:

$$\Lambda = \Lambda[D, k], \quad \Lambda_1 = \Lambda[D, k_1], \tag{II.64}$$

$\Lambda \geqslant \Lambda_1$, если $k(M) \geqslant k_1(M)$, для всех $M \in D$. Действительно, пусть $\{p, \boldsymbol{u}\}$ — решение, отвечающее распределению проницаемостей k, а $\{p_1, \boldsymbol{u}_1\}$ — решение, отвечающее распределению k_1. Имеем:

$$\Lambda_1 = 2\mu^{-1}P^{-2}Y^*[p_1, k_1] \leqslant 2\mu^{-1}P^{-2}Y^*[p, k_1] =$$
$$= \mu^{-1}P^{-2}\int_D k_1 |\nabla p|^2 dV \leqslant \mu^{-1}P^{-2}\int_D k |\nabla p|^2 dV =$$
$$= 2\mu^{-1}P^{-2}Y^*[p, k] = \Lambda. \tag{II.65}$$

При этом первое из неравенств (II.65) следует из того, что p_1 минимизирует функционал $Y^*[\varphi, k_1]$, а второе — просто из того, что $k \geqslant k_1$.

В частности, при введении в область течения непроницаемых перегородок коэффициент продуктивности будет уменьшаться, а при введении областей бесконечной проницаемости — увеличиваться.

Разобьем поток тонкими непроницаемыми поверхностями на множество тонких трубок тока, таких, что течение в каждой из них можно считать одномерным. (Это эквивалентно заданию направления линий тока в каждой точке пласта.) Тогда по доказанному подсчитанный таким образом коэффициент продуктивности окажется меньше действительного.

Напротив, если зададим форму поверхностей постоянного давления (изобар) (что эквивалентно введению в поток множества бесконечно тонких поверхностей бесконечной проницаемости), то рассчитанный таким образом коэффициент продуктивности окажется завышенным по сравнению с действительным (см. пример 3).

Еще одно важное утверждение получим следующим образом. Выберем вблизи непроницаемой (боковой) границы области течения примыкающую к ней подобласть D_ε и будем уменьшать проницаемость в ней до нуля. В пределе будем иметь новую область течения с вырезанной подобластью D_ε (с вдавленной границей). По доказанному ранее коэффициент продуктивности уменьшится.

С другой стороны, если область D_ε примыкает к одной из изобар — входной C_1 или выходной C_2 — и проницаемость в ней стремится к бесконечности, то в пределе получим область со вдавленной внутрь входной или выходной границей. По доказанному ранее коэффициент продуктивности при этом увеличится.

Таким образом, имеем так называемый принцип вдавливания. При «вдавливании» в область фильтрации непроницаемых границ коэффициент расхода уменьшается, при

вдавливании» входной и выходной изобар коэффициент расхода увеличивается. Отсюда уже непосредственно получаем принцип сравнения областей: если входная изобара C_1 (контур питания) для области D может быть заключена между входными изобарами для областей D^* и D_*, $D_* \subset D \subset D^*$, то коэффициент продуктивности для области D принимает промежуточное значение между коэффициентами продуктивности для областей D_* и D^*:

$$\Lambda^* \leqslant \Lambda \leqslant \Lambda_*. \tag{II.66}$$

Для однородных областей ($k = \text{const}$) ряд оценок можно получить, используя так называемые теоремы о симметризации. Известно [32], что если область D подвергается симметризации (относительно плоскости, прямой, точки) или последовательности отражений, то уменьшается интеграл $\int\limits_D |\nabla\varphi|^2 dV$. Отсюда следует, что симметризация области движения приводит к уменьшению коэффициента продуктивности (см. пример 4).

Можно рассмотреть и более общий вопрос о пределах изменения коэффициента продуктивности области, если объем ее фиксирован. Поскольку ясно, что, сближая входную и выходную изобары, можно, не уменьшая объема области, получить сколь угодно большой расход, очевидно, что верхней границы для коэффициента продуктивности не существует. Однако существует нижняя граница. Одна из возможных при этом постановок задачи состоит в следующем. Рассмотрим бесконечную трубку C_q и пересекающую ее поверхность C_2. Поставим задачу об определении такой поверхности C_1, отсекающей вместе с поверхностями C_2 и C_q область D заданного объема V, чтобы коэффициент продуктивности этой области (при входе C_1, выходе C_2 и непроницаемой границе C_q) был минимален.

Оказывается [17], что на искомой границе C_1 должно выполняться дополнительное условие постоянства потока: $u_n = \text{const}$. Для однородного пласта это позволяет в явном виде сформулировать и решить задачу отыскания области минимального расхода.

Пример 1. Пусть задан горизонтальный пласт постоянной мощности с контуром питания C, на котором поддерживается постоянное давление P_0, и с n эксплуатационными скважинами радиусов $r_к$, помещенными в точках $z_к(x_к, y_к)$. По технологическим соображениям для каждой скважины устанавливается некоторое минимальное допустимое значение забойного давления $P_к^-$. Требуется так выбрать забойное давление $P_к$ из допустимого диапазона для каждой скважины

$$P_к^- \leqslant P_к \leqslant P_0,$$

чтобы суммарный дебит скважин Q был максимальным.

Прямое решение этой задачи требует достаточно сложных расчетов. Вначале следовало бы, решая задачу напорной фильтрации для области со скважинами, найти зависимость дебитов от забойных давлений:

$$Q_i = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(P_0 - P_i),$$

где A_{ij} — матрица коэффициентов влияния, а затем максимизировать сумму

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k = \sum_{i,\,k=1}^{n} A_{ik}\,(P_0 - P_i)$$

с учетом ограничения (II.67).

На самом деле во всем этом нет необходимости. Основываясь на принципе максимума, можно показать, что максимальный суммарный дебит достигается при минимальных допустимых забойных давлениях.

Действительно, пусть $p_0(x,\ y)$ — решение задачи напорной фильтрации, отвечающее граничным условиям $p_0\,|\,C_к = P_к^-$, а $p\,(x,\ y)$ — решение для другого набора значений давлений на скважинах $P_к$, удовлетворяющего условиям (II.67). Составим разность $\tilde{p}\,(x,\ y) = p - p_0$. Так как задача напорной фильтрации линейна, $\tilde{p}$ — решение, которое на контуре питания C_0 обращается в нуль, а на контурах скважин $C_к$ принимает положительные значения. По принципу максимума во всей области фильтрации

$$\tilde{p}\,(x,\ y) \geqslant 0 = \min \tilde{p}\,\{C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_к,\ \ldots,\ C_n\}.$$

Отсюда и из условия на контуре питания $\tilde{p}_0 = 0$ находим, что на контуре питания $\partial\tilde{p}/\partial\nu \geqslant 0$, где ν — направление внутренней нормали. Следовательно,

$$u_\nu - u_{0\nu} = -\,(k/\mu)\,(\partial p/\partial\nu - \partial p_0/\partial\nu) \leqslant 0,$$

$$Q = \int_C u_\nu dS \leqslant Q_0 = \int_C u_{0\nu} dS.$$

Это и доказывает сделанное утверждение.

Пример 2. Рассмотрим скважину радиуса ρ, центрально расположенную в круговом пласте радиуса R. Допустим, что эта скважина окружена зоной с проницаемостью $k^* < k$. Попытаемся оценить, как это повлияет на дебит скважины.

Обозначим через r_- и r_+ максимальное и минимальное расстояния от центра скважины до границы зоны ухудшенной проницаемости. Дебит скважины оказывается заниженным, если считать зону измененной проницаемости кругом радиуса r_+, и завышенным, если принять радиус зоны равным r_-. Таким образом,

$$Q_+ < Q < Q_-;\quad Q_\pm = 2\pi kh\,(P_к - P_с)\,\mu^{-1}\left(\ln R/r_\pm + k/k_-\ln r_\pm/\rho\right). \qquad \text{(II.67)}$$

Фактически, если размер загрязненной зоны составляет несколько метров, а r_- и r_+ отличаются в несколько раз, правые и левые части неравенства (II.67) близки между собой. В результате оказывается излишним детальное исследование влияния формы зоны на величину дебита.

Пример 3. Рассмотрим пласт, имеющий форму равнобедренного треугольника ABC, в вершине A которого с углом α расположена скважина радиусом ρ. Допустим также, что стороны AB и AC непроницаемы, а основание BC является изобарой («контуром питания»). Для оценки дебита скважины примем сначала, что пласт разбит прямолинейными границами на узкие секториальные трубки тока. Суммируя их дебиты, получим

$$Q = Q_- = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{kh\Delta p}{\mu}\left[\ln\frac{R}{\rho\cos\varphi}\right]^{-1} d\varphi = \frac{2kh\Delta p}{\mu}\int_0^{\alpha}\left[\ln\frac{R}{\rho} - \ln\cos\varphi\right]^{-1} d\varphi. \qquad \text{(II.68)}$$

Затем, разбивая пласт на тонкие слои концентричными со скважиной изобарами, получим

$$Q = Q_+;\ \Delta p = Q_+\int_\rho^R \frac{\mu}{2kh_z}\,\frac{dr}{r};\quad Q_+ = \frac{2kh\alpha\Delta p}{\mu\ln(R/\rho)}. \qquad \text{(II.69)}$$

По доказанному, для истинного дебита Q имеем $Q_- \leqslant Q \leqslant Q_+$

$$\left[1-\frac{\ln\cos\alpha}{\ln(R/\rho)}\right]^{-1} \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}\left[1-\frac{\ln\cos\varphi}{\ln R/\rho}\right]^{-1}d\varphi \leqslant \frac{\mu Q}{2kh\alpha\Delta p}\ln\frac{R}{\rho} \leqslant 1. \quad \text{(II.70)}$$

Достаточная для технических расчетов 10 %-ная точность заведомо обеспечивается при $R/\rho = 100$ вплоть до $\alpha = 0{,}9 \approx 51°$.

Пример 4. Допустим, что имеется плоский пласт площадью S с контуром питания C и с круговой галереей радиусом $\rho < R = (S/\pi)^{1/2}$.

Выполняя симметризацию относительно оси галереи, получим задачу о течении между двумя круговыми галереями радиусов ρ и R. По сказанному выше, для дебита исходной задачи имеем

$$\frac{2\pi kh\Delta p}{\mu \ln R/\rho} \leqslant Q. \quad \text{(II.71)}$$

§ 3. Установившиеся безнапорные течения

Безнапорным называется фильтрационное течение, при котором полный напор недостаточен для того, чтобы жидкость поднялась до кровли пласта, в результате чего фильтрационный поток ограничивается сверху свободной поверхностью — поверхностью раздела между грунтовыми водами и воздухом или между нефтью и газом. Аналогичное течение имеем в тех случаях, когда под слоем движущейся нефти располагается неподвижная подошвенная вода. В термине «свободная поверхность» пренебрегается тем обстоятельством, что переходная область между жидкостью и газом или между двумя жидкостями в пористой среде не является резкой границей типа границы вода — воздух в стакане, а обязательно размыта из-за действия капиллярных сил. Толщина капиллярного переходного слоя измеряется десятками сантиметров и метрами. Поэтому кратко рассматриваемая в этом параграфе теория оказывается тем более точной, чем больше характерные размеры потока.

Будем рассматривать, таким образом, свободную границу как математическую поверхность, отделяющую фильтрационный поток от области, занятой неподвижной жидкостью. На этой границе должны выполняться два физических условия. С одной стороны, такая поверхность представляет собой поверхность тока, на которой нормальная компонента скорости обращается в нуль:

$$u_n|_\Gamma = 0, \quad \text{(II.72)}$$

а с другой стороны — давление на свободной границе определяется гидростатическим давлением пограничной с фильтрационным потоком неподвижной жидкости, и потому

$$p|_\Gamma = p_0 - \rho' gz, \quad \text{(II.73)}$$

где ρ' — плотность «соседней» жидкости; p_0 — давление в этой жидкости на горизонтальной поверхности ($z = 0$). В частности, если фильтрационный поток граничит с частью пласта, заполненной воздухом или газом пренебрежимо малой плотности, то из (II.73)

получаем условие постоянства давления на свободной поверхности безнапорного потока $p|_\Gamma = p_0$. Именно выполнение этого условия характерно для безнапорных течений.

Свободная граница отличается от заданных заранее тем, что на ней ставятся два граничных условия вместо одного. Лишнее краевое условие служит для отыскания неизвестной заранее свободной границы.

Безнапорные фильтрационные течения играют основную роль в теории движения грунтовых вод. В настоящее время создан аналитический аппарат, позволяющий получить точные решения ряда важных задач. Эти задачи и их решения рассмотрены детально в классической монографии П. Я. Кочиной [33], а также в [34]. В последующем изложении используется лишь приближенная гидравлическая теория так называемых пологих безнапорных движений.

Под пологим фильтрационным движением понимается движение, происходящее в пластах с конечной глубиной водоупора, в котором вертикальная компонента скорости фильтрации u_z мала по сравнению с горизонтальной компонентой. Так как характерной скоростью при безнапорном фильтрационном движении является коэффициент фильтрации C — см. формулу (I. 7), то горизонтальная компонента скорости может быть либо порядка C, либо мала по сравнению с C, т. е.

$$u_z \ll C = k\rho g/\mu. \tag{II.74}$$

Это неравенство можно переписать еще так:

$$\mu u_z/k \ll \rho g. \tag{II.75}$$

Но $\mu u_z/k$ представляет собой ту часть вертикальной компоненты градиента давления, которая обусловлена движением. Из неравенства (II.75) следует, что вертикальная компонента фильтрационного градиента давления при пологих безнапорных движениях мала по сравнению с гидростатической. Поэтому распределение давления по вертикали можно при пологих движениях считать гидростатическим. Выведем одно важное для дальнейших рассуждений соотношение. Рассмотрим объем V, ограниченный свободной поверхностью жидкости и некоторой цилиндрической поверхностью с вертикальными образующими. Обозначим через h расстояние от свободной поверхности жидкости до водоупора, а через z_0 расстояние от водоупора до горизонтальной плоскости $z=0$. Объем жидкости, заключенной в области V и приращение этого объема за время dt равны соответственно

$$\int_S mh\,dS, \quad \left(\int_S m\frac{\partial h}{\partial t}\,dS\right)dt, \tag{II.76}$$

где S — проекция объема V на горизонтальную плоскость.

Вместе с тем указанное приращение объема равно объему жидкости, притекающей в область V извне за время dt:

$$-dt\int_{\Gamma} dl \int_{z_0}^{h+z_0} u_n dz = -dt \int_{\Gamma} q_n dl, \quad \boldsymbol{q} = \int_{z_0}^{z_0+h} \boldsymbol{u} dz, \tag{II.77}$$

где Γ — замкнутый контур, ограничивающий площадку S; u_n — нормальная компонента скорости $\boldsymbol{u}$; q_n — нормальная компонента вектора потока $\boldsymbol{q}$ на Γ.

Приравнивая (II.76) и (II.77), по формуле преобразования контурного интеграла в интеграл по площади и с учетом того, что площадка S может быть выбрана произвольно, получаем уравнение

$$mh_{,t} + \operatorname{div}_2 \boldsymbol{q} = 0. \tag{II.78}$$

Заметим, что уравнение (II. 78) — точное, справедливое независимо от каких-либо допущений.

Для установления связи между q и h воспользуемся предположением о пологости движения.

По предыдущему, давление в этом случае распределяется по вертикали с точностью до малых величин по гидростатическому закону, так что величина $H = z + p/\rho g$ вдоль каждой вертикали будет постоянна и равна $h + z_0$:

$$H = h + z_0 + O(u_z/C); \quad \boldsymbol{u} = -C \operatorname{grad}_2 (h + z_0) + O(u_z).$$

Таким образом, пренебрегая малыми величинами, скорость $\boldsymbol{u}$ можно вынести из-под знака интегрирования по вертикали в соотношении (II. 77), определяющем вектор q. Получаем

$$\boldsymbol{q} = -Ch \operatorname{grad}_2 (h + z_0). \tag{II.79}$$

Подставляя (II.79) в (II.78), имеем

$$h_{,t} = (C/m) \operatorname{div} (h \operatorname{grad} (h + z_0)). \tag{II.80}$$

В частности, если поверхность водоупора представляет собой горизонтальную плоскость ($z_0 = 0$), уравнение (II.80) принимает вид:

$$h_{,t} = a\Delta h^2, \quad a = C/2m = 2^{-1} k\rho g (\mu m)^{-1}. \tag{II.81}$$

Уравнения (II.80) и (II.81) были впервые получены Буссинеском.

Для стационарных движений уравнение Буссинеска приводится к уравнению Лапласа для квадратичной функции напора:

$$\Delta\chi = 0, \quad \chi = 2^{-1}(h^2 + 2hz_0). \tag{II.82}$$

Теория пологих безнапорных движений приближенная. Несмотря на это, при фильтрации в области, ограниченной цилиндрической поверхностью с вертикальными образующими и горизонтальным водоупором, на основе такой теории получаются точные значения дебитов и точные распределения по плоскости вектора интегрального потока $\boldsymbol{q}$ [34].

§ 4. Нестационарное движение однородной сжимаемой жидкости. Линейная теория[1]

Постановка основных задач. Простейший и наиболее изученный случай нестационарной фильтрации — движение одно-

[1] См. также [47, 6, 12, 44].

родной слабосжимаемой жидкости в упруго деформируемом пласте. Это движение (см. § I.4) описывается уравнением пьезопроводности для давления p

$$\partial p/\partial t = \varkappa\,(\partial^2 p/\partial x^2 + \partial^2 p/\partial y^2 + \partial^2 p/\partial z^2) \equiv \varkappa \Delta p, \qquad \text{(II.83)}$$

по форме совпадающим с классическим уравнением теплопроводности.

Область, в которой ищется распределение давления в жидкости, та же, что рассматривалась для стационарных течений: пористый пласт, часть границ которого непроницаема, а другая часть сообщается с вскрывающими пласт скважинами и соседними пластами.

Граничные условия в задачах линейной нестационарной фильтрации задаются на границах того же типа, что и в задачах напорной стационарной фильтрации: непроницаемых границах, скважинах, галереях, контурах питания. Однако теперь давление, напор или расход, задаваемые на скважинах или галереях, являются, вообще говоря, функциями времени. Часто в модельных задачах задается мгновенное изменение давления или расхода на скважине или галерее от начального до некоторого конечного, что соответствует физически быстрому пуску или закрытию скважины или галереи.

Все принятые обычно варианты граничных условий укладываются в общую форму

$$(ap + b\partial p/\partial n) = f(x,\ y,\ z,\ t),\ a^2 + b^2 \neq 0;\ b/a \geqslant 0. \qquad \text{(II.84)}$$

Из общей теории уравнения теплопроводности известно, что если на границе области задано условие (II.84), а в начальный момент времени $t=0$ условие

$$p(x,\ y,\ z,\ 0) = \varphi(x,\ y,\ z), \qquad \text{(II.85)}$$

то существует единственное распределение давления $p(x,\ y,\ z,\ t)$, удовлетворяющее уравнению (II.83) и условиям (II.84), (II.85), непрерывное в замкнутой области D, включая границу, на любом конечном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T$.

Хорошо разработанная техника решения уравнения теплопроводности (см., например, [40]) применима и к задачам теории упругого режима фильтрации. Однако специфика этих задач, связанная с наличием некоторых малых параметров (например, отношение радиуса скважины к расстоянию между скважинами, расстояние между скважинами к расстоянию до контура питания) в ряде случаев существенно упрощает решение.

В типичных условиях нефтяного или газового месторождения или водоносного пласта толщина пласта много меньше его горизонтальной протяженности, что позволяет рассматривать течение как плоскопараллельное. Рассмотрим несколько характерных случаев.

Плоскопараллельное одномерное движение. Пусть скорость течения параллельна оси x не зависит от координат y и z. Давление при этом удовлетворяет уравнению

$$\partial p/\partial t = \varkappa \partial^2 p/\partial x^2 \quad 0 \leqslant x \leqslant L. \tag{II.85}$$

Наиболее интересны случаи, для которых в начальный момент времени движение в пласте стационарно. Поскольку стационарное распределение давления также удовлетворяет уравнению (II.86), удобно отсчитывать давление в каждой точке от стационарного значения $P_0(x)$. Таким образом, разность $P = p - P_0$ удовлетворяет уравнению (II.84) с нулевым начальным условием $P(x, 0) = 0$.

Пусть при $x = L$ (на контуре питания) давление сохраняет постоянное значение, равное начальному, а через сечение $x = 0$ отбирается жидкость, и давление в нем меняется по закону $p = f(t)$. Чтобы получить решение при указанных начальных и краевых условиях, применим преобразование Лапласа, т. е. введем функцию

$$L\{P(x, t)\} = \bar{P}(x, \sigma) = \int_0^\infty e^{-t\sigma} P(x, t)\, dt. \tag{II.87}$$

Для $\bar{P}$ получим задачу

$$d^2\bar{P}/dx^2 - \nu^2\bar{P} = 0; \quad \begin{matrix} \bar{P}(0) = L\{f(t)\} = F(\sigma); \\ \bar{P}(L) = 0; \ \nu^2 = \sigma/\varkappa, \end{matrix} \tag{II.88}$$

имеющую решение

$$\bar{P} = F(\sigma)\,\mathrm{sh}\,[(L - x)\,\nu]/\mathrm{sh}\,(L\nu). \tag{II.89}$$

Чтобы перейти от изображения к функции $P(x, t)$, предположим вначале, что в сечении $x = 0$ давление мгновенно принимает фиксированное значение $P = p^0 \neq 0$. Тогда $F(\sigma) = p^0/\sigma$.

$$\bar{P} = (p^0/\sigma)\,\mathrm{sh}\,[(L - x)\,\nu]/\mathrm{sh}\,(L\nu). \tag{II.90}$$

Рассмотрим асимптотику решений при малых временах, чему, согласно теории преобразования Лапласа, соответствуют большие значения $|\sigma|$. Выразим в (II.90) гиперболические функции через показательные и, считая $2L\sqrt{\frac{\sigma}{\varkappa}} \gg 1$, разложим это выражение в ряд по степеням $\exp\left(-2L\sqrt{\sigma/\varkappa}\right)$, т. е.

$$\bar{P}(x, \sigma) = (p^0/\sigma)\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\nu(x + 2Ln)) - \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\nu(2L(n + 1) - x))\right\}. \tag{II.91}$$

Производя почленное обращение ряда (II.91), с помощью формул обращения, выведенных, например, в [25], имеем

$$P(x, t) = P^0 \sum_{n=0}^{\infty} \{\mathrm{erfc}\,[(2Ln + x)/2\sqrt{\varkappa t}] - \mathrm{erfc}\,[(2L(n + 1) - x)/2\sqrt{\varkappa t}]\}. \tag{II.92}$$

Ряд (II.92) сходится при всех t и x. Рассмотрим вначале асимптотику при условии $L^2/\varkappa t \gg 1$. Тогда в выражении для $P(x, t)$ можно все значения erfc заменить их предельными $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$, за исключением члена ряда $\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}$. Имеем

$$P(x, t) = p^0 \operatorname{erfc}\left[x/2\sqrt{\varkappa t}\right]. \qquad \text{(II.93)}$$

Полученное решение (II.93) имеет двоякий смысл. С одной стороны, оно описывает распределение давления в пласте конечной длины L при малых временах $\varkappa t \ll L^2$. С другой стороны, оно дает распределение давления в пласте бесконечной протяженности $L \to \infty$. Любое конечное изменение давления распространяется за заданное время лишь на конечное расстояние и, если рассматриваются малые времена, можно считать пласт бесконечным. Решение (II.93) автомодельно: независимые переменные x и t входят в него лишь в комбинации $x/\sqrt{\varkappa t}$.

В силу линейности уравнения (II.86) решение для случая произвольного вида функции $P(0, t) = f(t)$ можно получить с помощью принципа суперпозиции с использованием интеграла Дюамеля

$$P(x, t) = \int_0^t (df(\tau)/d\tau)\, P_1(x, t-\tau)\, d\tau, \qquad \text{(II.94)}$$

где $P_1(x, t)$ — решение (II.92) или (II.93) для случая скачкообразного изменения давления при $x = 0$.

Рассмотрим теперь противоположную асимптотику $t \gg L^2/\varkappa$. В этом случае выражение (II.92) неудобно тем, что приходится суммировать много членов ряда. Чтобы получить решение в более удобном виде, можно воспользоваться так называемой второй теоремой разложения для преобразования Лапласа [25], согласно которой регулярная функция $F(\sigma)$, стремящаяся к нулю при $|\sigma| \to \infty$, является преобразованием Лапласа функции

$$\Phi(t) = \sum_k \operatorname*{Res}_{\sigma_k} [F(\sigma) e^{\sigma t}], \qquad \text{(II.95)}$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам σ_k функции $F(\sigma)$ в порядке неубывания их модулей. Тогда для $F(\sigma)$, выражаемого формулой (II.90), получим разложение

$$P_1(x, t) = p^0(1 - x/L) - 2p^0/\pi^{-1} \sin[\pi(1 - x/L)] \exp(-\pi^2 \varkappa t/L^2) + O[\exp(-(4 - \varepsilon)\pi^2 \varkappa t/L^2)]. \qquad \text{(II.96)}$$

Из формулы (II. 96) видно, что приближение к стационарному линейному распределению давления происходит экспоненциально, причем характерное время выхода на стационарный режим имеет порядок

$$\tau \approx L^2 \varkappa^{-1} \pi^{-2}. \qquad \text{(II.97)}$$

Для типичных условий фильтрации маловязкой нефти или воды в коллекторах с высокой проницаемостью $\varkappa$ имеет порядок

10^4 см^2/с. Тогда из (II.97) следует, что характерное время переходных процессов в малых блоках породы протяженностью 1 м $\tau \approx 0{,}1$ с, при $L = 300$ м (порядка расстояния между скважинами) $\tau \approx 3$ ч, $L = 10$ км (порядка размеров месторождения) $\tau = 100$ сут и при $L = 100$ км (порядка размеров крупной водонапорной системы) $\tau \approx 10^9$ с ≈ 30 лет. В коллекторах с высоковязкой нефтью и низкой проницаемостью значение $\varkappa$ может оказаться на один-два порядка меньше. Тогда соответственно на один-два порядка увеличиваются значения характерных времен.

В практических задачах часто приходится рассматривать нестационарные процессы в сложных системах, в которые входят элементы с различными собственными временами. Оценивая время установления стационарного течения для каждого элемента, мы упростим задачу, отделив те элементы, движение в которых можно считать стационарным, и те, в которых нестационарный процесс находится в начальной стадии.

Плоскорадиальное движение. Рассмотрим одномерное осесимметричное (плоскорадиальное) нестационарное течение, соответствующее нестационарному притоку к одиночной скважине в круговом пласте. Распределение давления определяется как решение уравнения пьезопроводности с радиальной симметрией

$$\partial p/\partial t = (\varkappa/r)\,\partial\,[r\partial p/\partial r]/\partial r \quad 0 < \rho \leqslant r \leqslant R \leqslant \infty, \tag{II.98}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$p(r,\ 0) = f(r) \tag{II.99}$$

и граничным условиям при $r = \rho$ и $r = R$.

Как и выше, в силу линейности уравнения (II.98) можно подразумевать под p только отклонения от стационарного распределения давления $p = C_1 \ln r + C_2$, т. е. считать начальное распределение $f(r) \equiv 0$.

Переходя в уравнении (II.98) к изображениям по Лапласу, получаем

$$r^{-1}d\,[r d\bar{p}\,(r,\ \sigma)/dr]/dr = \nu^2 \bar{P}\,(r,\ \sigma),\ \ \nu^2 = \sigma/\varkappa, \tag{II.100}$$

общее решение которого имеет вид

$$\bar{P}\,(r,\ \sigma) = C_1 \mathrm{I}_0\,(r\nu) + C_2 \mathrm{K}_0\,(r\nu). \tag{II.101}$$

где I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя от мнимого аргумента нулевого порядка.

Будем искать решения для случая, когда на скважине задается постоянный дебит при всех $t > 0$. Решение этой задачи используется в наиболее распространенных способах определения параметров пласта по наблюдениям нестационарного притока к скважине. Положим

$$(2\pi k/\mu)\,(r\partial p/\partial r) = -q = \mathrm{const} \text{ или}$$

$$(\partial p/\partial r)_{r=\rho} = -q\mu/2\pi k\rho = p^*/\rho;\ p(R,\ t) = 0. \tag{II.102}$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим из (II.101) и (II.102)

$$\overline{P}(r\sigma) = (p^*/\rho\nu\sigma)[K_0(R\nu)\,I_0(r\nu) - K_0(r\nu)\,I_0(R\nu)]: \\ :[I_1(\rho\nu)\,K_0(R\nu) + I_0(R\nu)\,K_1(\rho\nu)]. \qquad (II.103)$$

Радиус скважины ρ обычно равен 10 см или менее. Если расстояние между скважинами $R > 300$ м, то для типичных условий исследования скважины на нестационарный приток можно применить «промежуточную асимптотику», т. е. положить

$$\rho/\sqrt{\varkappa t} \ll 1 \ll R/\sqrt{\varkappa t},$$

что позволяет упростить выражение (II.103), полагая $\rho\sqrt{\sigma/\varkappa} \ll 1 \ll R\sqrt{\sigma/\varkappa}$. При этом можно использовать асимптотические формулы для $K_0(z)$, $K_1(z)$, $I_0(z)$ и $I_1(z)$ при больших и малых значениях аргумента

$$I_0(z) \approx e^z(2\pi z)^{-1/2},\ K_0(z) \approx e^{-z}(\pi/2z)^{1/2} \quad z \to \infty \\ K_0(z) \approx -\ln(\gamma z/2)\ \gamma = e^C \quad z \to 0, \qquad (II.104)$$

где $C = 0{,}7772$ — постоянная Эйлера.

Тогда из (II.103) получим

$$\overline{P}(r,\ \sigma) = -p\,\sigma^{-1}K_0(r\nu). \qquad (II.105)$$

В частности, для давления в скважине

$$\overline{P}(\rho,\ \sigma) = p^*\sigma^{-1}\ln(\gamma\rho\nu). \qquad (II.106)$$

Отметим важное обстоятельство: соотношение (II.105) не содержит радиус скважины ρ. Это означает, что в области применимости условия $\rho^2/\varkappa t \ll 1$ распределение давления не зависит от радиуса скважины. Используя таблицы преобразований Лапласа и связь между преобразованием функции Лапласа и ее производной, получим

$$p(r,\ t) = 2^{-1}p^*\,\mathrm{Ei}(-r^2/4\varkappa t). \qquad (II.107)$$

Для давления на скважине с помощью асимптотического выражения $\mathrm{Ei}(-x) = \ln\gamma x$ при $x \to \infty$ имеем

$$p(\rho,\ t) = -q\mu(4\pi k)^{-1}\ln(\gamma\rho^2/4\varkappa t) = Q\mu(4\pi kh)^{-1}\ln(2{,}25\varkappa t/\rho^2), \qquad (II.108)$$

где Q — полный дебит скважины (q — дебит на единицу толщины пласта). Формулы (II.107) и (II.108) часто используются для определения параметров пласта по данным о нестационарном притоке.

Определение параметров пласта. Общий принцип исследования пластов при нестационарном течении заключается в том, что путем изменения режима эксплуатации скважин в пласте искусственно создается нестационарный режим фильтрации и измеряется давление в зависимости от времени в одной или нескольких скважинах. На основе данных об изменении дебитов и давления, используя решения задач нестационарной фильтрации,

можно оценить параметры пласта — проницаемость, пьезопроводность, расстояния до границ и т. д.

Самым простым и наиболее употребительным способом создания нестационарного течения является временная остановка одной из скважин. Условие ее остановки с момента t_0 можно рассматривать как задание на скважине при $t>t_0$ постоянного дебита — Q. Тогда давление на забое остановленной скважины описывается формулой (II.108), определяющей прямую в координатах p, $\ln t$. При построении кривой восстановления давления в остановленной скважине асимптотически прямолинейный участок часто устанавливается через непродолжительное время, обычно в первые часы (рис. 5).

Пусть уравнение асимптоты есть $p = A \ln t + B$. Сравнение с формулой (II.108) показывает, что $A = Q\mu/4\pi kn$, $B = A \ln(4\varkappa/\gamma\rho^2)$. Поскольку значение Q известно, то после определения по графику параметров A и B можно найти гидропроводность пласта kh/μ и отношение $\varkappa/\rho^2$.

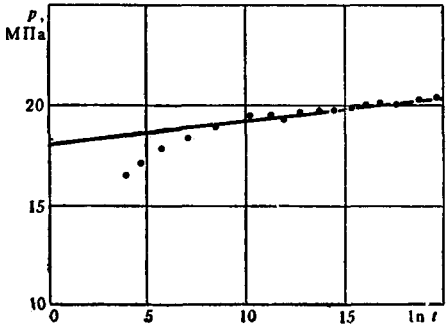
Следует учитывать, то радиус скважины в формуле для притока обычно не равен истинному вследствие того, что скважина вскрывает пласт не на всю толщину и не вся поверхность ее открыта для фильтрации жидкости (несовершенство скважины по степени и характеру вскрытия). Кроме того, как было показано в § 1 данной главы, на кажущийся радиус скважины существенно влияет загрязненность призабойной зоны, где проницаемость может быть существенно уменьшенной, или наличие в ней трещин. Поэтому, зная величину $\varkappa/\rho^2$, нельзя по отдельности определить $\varkappa$ и ρ^2. Для определения пьезопроводности пласта удобнее использовать метод гидропрослушивания, т. е. исследовать изменение давления в реагирующей скважине, не работавшей к моменту изменения дебита возмущающей скважины. В этом случае характерным размером является не радиус скважин, а расстояние между скважинами, которое известно достаточно точно.

Для определения пьезопроводности пласта методом гидропрослушивания, если дебит возмущающей скважины изменяется скачком, можно использовать формулу (II.107), записав ее в виде

$$\Delta p = p(r, t) - p(r, 0) = \\ = -Q\mu(4\pi kh)^{-1}\,\mathrm{Ei}(-r^2/4\varkappa t), \qquad (II.109)$$

где Δp — изменение давления в реагирующей скважине; Q — изменение дебита; r — расстояние реагирующей скважины от возмущающей. Обработка кривых изменения давления в реагирующей скважине заключается в том, что на кривой фиксируется время появления каких-либо

РИС. 5. Кривая восстановления давления



характерных точек. Например, удобно фиксируется точка касания кривой $\Delta p\,(t)$ с прямой, проведенной из начала координат. В этой точке ($t = t_1$), как следует из формулы (II.109), $r^2/4\varkappa t_1 = 0{,}44$, откуда $\varkappa = 0{,}57r^2/t_1$.

Приведенные примеры решения обратных задач для определения параметров пласта ограничены условиями, при которых скважина может рассматриваться как мгновенно пущенный источник постоянной интенсивности в бесконечном однородном пласте. Фактически, когда возмущение, вызванное закрытием скважины, доходит до границ пласта, т. е. через время порядка $\Theta = R^2/\varkappa$, кривая восстановления давления в скважине начинает искажаться, а через достаточно большое время выходит на горизонтальную асимптоту, соответствующую стационарному пластовому давлению. С другой стороны, приток из пласта в скважину, остановленную на устье, не прекращается мгновенно вследствие сжигаемости жидкостей и газов, заполняющих скважину. Время выхода на асимптоту в координатах Δp, $\ln t$ не должно превышать времени дополнительного притока после остановки. Поэтому возможны условия, особенно в скважинах, расположенных близко от границ пласта, когда прямолинейного участка на кривой $p(\ln t)$ не существует. В связи с этим был предложен ряд способов обработки кривых восстановления давления, учитывающих приток в скважину после ее остановки.

Один из наиболее общих методов обработки кривых восстановления давления был предложен в работе [31]. В этом методе непосредственно используются преобразования Лапласа кривых восстановления давления, вследствие чего он пригоден при произвольном изменении дебита скважин. Такой метод позволяет также в ряде случаев определять по кривым восстановления давления некоторые характеристики неоднородности пласта.

Рассмотрим пласт произвольной конфигурации, в котором при $t = 0$ начинает эксплуатироваться скважина при нестационарном режиме. Пусть в результате измерений известны зависимости $p\,(\rho, t)$ и $\frac{2\pi kh}{\mu}\rho\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=\rho} = q\,(t)$. Давление в пласте $p\,(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению (II.83), а его преобразование по Лапласу $\overline{P}\,(x, y, z, \sigma)$ — уравнению

$$\nabla^2\overline{P} = \overline{\sigma}P/\varkappa. \qquad \text{(II.110)}$$

На непроницаемых участках границы справедливо условие $\partial\overline{P}/\partial n = 0$, на контурах питания $\overline{P} = 0$, на скважине $\overline{P}|_{r=\rho} = \overline{P}_1(\sigma)$. Положим $U = \overline{P}\,(x, y, z, \sigma)/\overline{P}_1\,(\sigma)$. Функция U удовлетворяет уравнению (II.110) и однородным условиям на внешних границах пласта (на скважине $U = 1$). Эта функция не зависит от режима работы скважины. Для преобразования по Лапласу дебита скважины $\overline{Q}\,(\sigma) = \int\limits_0^\infty q\,(t)\,e^{-\sigma t}dt$ имеем

$$Q(\sigma) = 2\pi (kh/\mu)\, \rho \int_0^\infty e^{-\sigma t} (\partial p/\partial r)_{r=\rho} dt =$$

$$= 2\pi (kh/\mu)\, \rho \overline{P}_1(\sigma) (\partial U/\partial r)_{r=\rho}. \qquad (II.111)$$

Из формулы (II.111) следует, что отношение

$$\psi(\sigma) = \overline{P}_1(\sigma)/\overline{Q}(\sigma) \qquad (II.112)$$

зависит только от вида функции U, но не от режима эксплуатации скважины. Вид функции $\psi(\sigma)$ полностью определяется параметрами пласта. Когда функции $p_1(t)$ и $q(t)$ известны, нетрудно численно получить зависимости $\overline{P}_1(\sigma)$ и $\overline{Q}(\sigma)$, а отсюда — $\psi(\sigma)$. По виду функции $\psi(\sigma)$ можно определить некоторые параметры пласта. Рассмотрим простейший пример — скважину в однородном бесконечном пласте. Функция U, как легко получить из формулы (II.105), имеет вид

$$U = K_0(r\nu)/K_0(\rho\nu), \quad \nu = \sqrt{\sigma/\varkappa}, \qquad (II.113)$$

откуда

$$\psi(\sigma) = (2\pi kh\rho \partial U/\partial r)^{-1}\mu = (2\pi kh\rho)^{-1}\mu K_0(\rho\nu)/K_1(\rho\nu). \qquad (II.114)$$

При практическом построении преобразований Лапласа от функций $p_1(t)$ и $q(t)$ удобно перейти к переменной $\tau = 1/\sigma$, полагая $P(\tau) = \int_0^\infty p(t) e^{-t/\tau} dt$. Значения τ не следует брать меньше 1—2 мин. Поэтому, учитывая порядок $\varkappa$ и ρ, видим, что значения $\rho\sqrt{\sigma/\varkappa} = \rho/\sqrt{\varkappa\tau}$ достаточно малы, чтобы можно было использовать представление функций K_0 и K_1 для малых значений аргумента. Тогда получим

$$\Psi(\tau) = \Psi(\sigma) = -\mu (2\pi kh)^{-1} \ln\left(\gamma\rho/2\sqrt{\varkappa\tau}\right) =$$

$$= \mu (4\pi kh)^{-1} \ln\tau + \mu (4\pi kh)^{-1} \ln(4\varkappa/\gamma^2\rho^2). \qquad (II.115)$$

Параметры пласта — коэффициенты в формуле (II.115) — определяются по графику $\Psi(\ln t)$ точно так же, как и по графику $p(\ln t)$ при мгновенной остановке скважины. То, что зависимость $\Psi(\ln\tau)$ прямолинейна, позволяет ограничиться вычислением интегралов при трех — четырех значениях τ.

Описанный общий подход позволяет получать методом восстановления давления некоторые параметры неоднородного пласта.

Рассмотрим пример. Пусть скважина радиусом ρ расположена в центре круговой зоны радиуса R в бесконечном пласте. Проницаемость зоны k_1 и пьезопроводность $\varkappa_1$ отличаются от проницаемости k_2 и пьезопроводности $\varkappa_2$ во внешней зоне пласта. Функция $\Psi(\tau)$ для этого случая может быть получена с использованием решения вида (II.101) и асимптотических формул (II.104). При этом для $\rho^2/\varkappa_1 \ll \tau \ll R^2/\varkappa_1$ функция $\Psi(\tau)$ асимптотически выражается формулой (II.115) при $k = k_1$ $\varkappa = \varkappa_1$, а для $\tau \gg R^2/\varkappa_2$ имеем

$$\Psi(\tau) = \mu(4\pi k_2 h)^{-1} \ln\tau + \mu (4\pi k_2 h)^{-1} \ln(4\varkappa^2/\gamma^2\rho^{*2}), \qquad (II.116)$$

где эквивалентный радиус скважины ρ^* тот же, что и для стационарного притока (см. II.19):

$$\rho^* = R\,(\rho/R)^{\gamma} = \rho\,(\rho/R)^{\gamma-1},\ \gamma = k_2/k_1. \qquad \text{(II.117)}$$

Сравнивая формулы (II.115) и (II.116), видим, что формула (II.117) описывает преобразованную кривую восстановления давления в скважине радиуса ρ^* в однородном пласте с параметрами внешней зоны. Точно так же можно показать, что эквивалентный радиус скважины, определяемый по данным о нестационарном притоке при горизонтальных или вертикальных трещинах, таков же, как и определяемый для стационарного течения при тех же условиях. Из этого примера видно, что исследование скважин методом восстановления давления позволяет определить степень загрязнения призабойной зоны и оценить эффективность работ по интенсификации притока.

Описанный метод обработки кривых восстановления давления можно использовать и для определения других параметров неоднородности пласта: расстояния до непроницаемого или проводящего экрана, радиуса трещин и т. д.

Метод интегральных соотношений. Хорошо разработанная теория уравнений математической физики позволяет получить в принципе точные решения широкого класса задач нестационарной фильтрации. Однако эти решения не всегда удовлетворяют требованиям простоты и обозримости. Учитывая недостаточную точность исходных данных в задачах фильтрации, связанных с движением жидкостей и газов в природных пластах, часто можно удовлетвориться простыми приближенными, легко обозримыми решениями.

Возможность успешного применения приближенных методов в теории нестационарной фильтрации связана со следующими особенностями рассматриваемых задач. Во-первых, большинство задач нестационарной фильтрации однородной жидкости сводится к решению уравнений параболического типа, для которых характерно сглаживание начальных возмущений искомых величин со временем и по мере продвижения внутрь области от источника возмущений. Во-вторых, в ряде задач, представляющих практический интерес, искомое решение имеет в некоторых точках области (скважины, галереи) известные особенности. При этом в основной части области состояние системы близко к невозмущенному. Наконец, в большинстве случаев существенны лишь интегральные характеристики решения.

В ряде приближенных методов используется понятие области влияния или области возмущения, вне которой течение можно считать невозмущенным, т. е. сохраняются начальные значения p или u. Возможность введения такой области следует из анализа точных решений, приведенных в настоящем параграфе. Например, из формулы (II.93) следует, что отклонение от начального убывает с ростом x как $\exp(-x^2/4\varkappa t)$. Одним из наиболее

общих приближенных методов в теории фильтрации является метод интегральных соотношений [3].

Сущность его заключается в том, что исходное дифференциальное уравнение (II.86) или (II.98) в области возмущения скважины заменяется системой интегральных соотношений вида

$$\int_{L_1(t)}^{L_2(t)} \partial p/\partial t\, f_i(x,\ t)\,dx = \varkappa \int_{L_1(t)}^{L_2(t)} \partial^2 p/\partial x^2\, f_i(x,\ t)\,dx,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \quad \text{(II.118)}$$

где $f_i(x,\ t)$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ образуют полную систему как функции от x на отрезке $[L_1(t),\ L_2(t)]$. Если $p(x,\ t)$, представить в виде разложения в ряд по функциям $f_i(x,\ t)$, то из (II.118) получим систему уравнений для коэффициентов этого ряда.

Рассмотрим задачу о возмущении первоначального стационарного движения в пласте. Возьмем простейшую систему функций — последовательные степени пространственной переменной

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$$

Пусть в момент $t = 0$ происходит отбор жидкости из пласта с расходом $-kb/\mu HG$. Давление в этом случае распределено по линейному закону

$$p(x,\ 0) = P + Gx. \quad \text{(II.119)}$$

Будем искать приближенное решение задачи в виде многочлена

$$p(x,\ t) = P_0(t) + P_1(t)\,x/l + \ldots + P_n(t)\,x^n/l^n \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

$$p(x,\ t) = p(x,\ 0) \quad (x \geqslant l). \quad \text{(II.120)}$$

В таком виде задача имеет $n + 2$ неизвестных: $P_i(t)$ и $l(t)$. Для их определения можно составить систему уравнений, состоящую из некоторого числа интегральных соотношений, граничного условия при $x = 0$ и условия при $x = l$. При $x = l$ должны выполняться условия непрерывности давления $p(l,\ t) = P + Gl$ и некоторой степени гладкости функции $p(x,\ t)$:

$$\partial p(l,\ t)/\partial x = \partial^2 p(l,\ t)/\partial x^2 = \ldots = \partial^k p(l,\ t)/\partial x^k = 0.$$

Выбор наилучшего приближенного метода расчета $p(x,\ t)$ связан с тем, насколько удачно подобрано число используемых интегральных соотношений и условий гладкости.

В рассматриваемом случае

$$p(0,\ t) = p_1,\ p(x,\ 0) = p_0 = 0. \quad \text{(II.121)}$$

Используя интегрирование по частям и теорему о дифференцировании определенного интеграла, приведем систему (II.118) к виду

$$\frac{d}{dt}\int_0^l p\,dx = -\varkappa\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0}, \quad \text{(II.122)}$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^l px\,dx = \varkappa p(0,\ t), \quad \text{(II.123)}$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^{l(t)} px^k dx = \varkappa k(k-1)\int_0^{l(t)} px^{k-2}dx,\ k \geqslant 2. \quad \text{(II.124)}$$

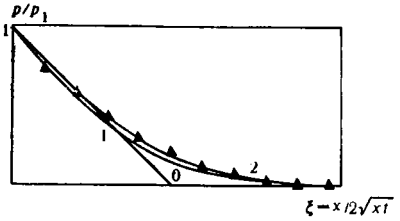


РИС. 6. К задаче о нестационарном притоке к галерее:
0 — нулевое приближение; *1* — первое приближение; *2* — точное решение

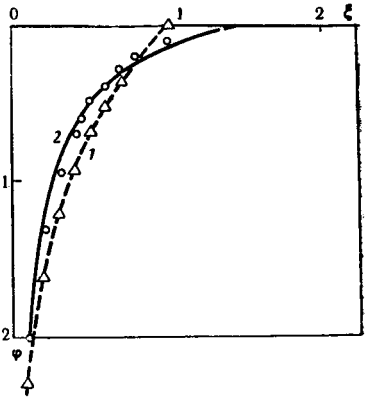


РИС. 7. Зависимость безразмерного давления от безразмерной координаты для осесимметричного течения.
Решения: *1* — приближенное; *2* — точное

При $n = 1$ из (II.122) следует

$$l = 2\sqrt{\varkappa t}, \quad u(0, t) = -k(\partial p/\partial x)/\mu = k(p_1 - p_0)/2\mu\sqrt{\varkappa t}. \qquad (II.125)$$

Напомним, что при точном решении по формуле (II.93) получим

$$u_0(0, t) = k(p_1 - p_0)/\mu\sqrt{\pi\varkappa t}. \qquad (II.126)$$

Заметим, что решение для $n = 1$ совпадает с тем, которое получается по известному методу последовательной смены стационарных состояний [44].

Для второго приближения ($n = 2$) используем снова соотношение (II.122) и условие

$$(\partial p/\partial x)_{x=l-0} = 0, \qquad (II.127)$$

что дает

$$p(x, t) = p_1(1 - x/l)^2, \quad l^2 = 12\varkappa t. \qquad (II.128)$$

Для скорости фильтрации при $x = 0$ получим

$$u(0, t) = k(p_1 - p_0)/\sqrt{3\varkappa t}, \qquad (II.129)$$

что близко к точному решению (II.126). Если во втором приближении вместо (II.127) использовать интегральное соотношение (II.122), то вид решения не изменится.

Если для третьего приближения ($n = 3$) использовать соотношения (II.122), (II.123) и (II.127), то третье приближение совпадает со вторым. Если же использовать первые три интегральных соотношения без условия (II.127), то получим (опуская промежуточные выкладки)

$$p(x, t) = p_1(1 - 0{,}583\zeta + 0{,}107\zeta^2 + 0{,}0061\zeta^3), \quad \zeta = x/\sqrt{\varkappa t}. \qquad (II.130)$$

На рис. 6 приведено сопоставление полученных приближенных решений с точными. При построении приближений более высокого порядка возникают трудности, обусловленные тем, что отсутствуют сколько-нибудь обоснованные правила выбора

наилучшего из нескольких дополнительных условий. Кроме того, при этом приходится строить приближения функций с помощью многочленов высокого порядка. Впрочем, основная цель построения приближенных решений — получение простых аналитических зависимостей — достигается уже приближениями второго порядка.

Рассмотрим без подробных выкладок осесимметричную задачу о пуске скважин с заданным дебитом q в бесконечном пласте. Решение уравнения (II.98) ищется в виде

$$p(r,\ t) = q \ln(r/l) + P_0 + P_1(r/l) +, \ \ldots, \ + P_n(r/l)^n, \quad \text{(II.131)}$$

где $l(t)$ — переменный радиус зоны возмущения. Система интегральных соотношений имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int_0^{l(t)} rp(r,\ t)\,dr = -\varkappa q, \quad \text{(II.132)}$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^{l(t)} r^{k+1}p(r,\ t)\,dr = \varkappa k^2 \int_0^{l(t)} p(r,\ t)\,r^{k-2}dr \ \ (k \geqslant 1). \quad \text{(II.133)}$$

В нулевом приближении ($P_0 = P_1 = \ldots = 0$) имеем единственную неизвестную функцию $l(t)$, которая определяется из уравнения (II.132):

$$l = 2\sqrt{\varkappa t}, \ p_0(r,\ t) = q \ln(r/2\sqrt{\varkappa t}). \quad \text{(II.134)}$$

С использованием уравнений (II.132), (II.133) и условий непрерывности p и $\partial p/\partial r$ (т. е. $p = 0$ и $\partial p/\partial r = 0$) при $r = l(t)$ получим первое приближение в виде

$$l = \sqrt{12\varkappa t}, \ \ p = q \ln\left(r/\sqrt{12\varkappa t}\right) - q + qr/\sqrt{12\varkappa t}. \quad \text{(II.135)}$$

При сопоставлении приближенных решений *1* с точным *2* (рис. 7) имеем, что даже результаты расчета по формуле (II.134) и тем более по формуле (II.135) довольно хорошо согласуются с точным решением.

Метод интегральных соотношений позволяет с удовлетворительной точностью получить простые приближенные решения задач о притоке к скважинам в ограниченном пласте. Соответствующие точные решения получаются в виде плохо сходящихся рядов Фурье — Бесселя и трудно обозримы. Ограничимся здесь одним примером.

Рассмотрим круговой пласт радиуса R, на контуре которого поддерживается постоянное давление, равное начальному (принимаемому за нуль). В начальный момент производится пуск скважины пренебрежимо малого радиуса, расположенной в центре пласта. Тогда вплоть до момента $t = t_1 = R^2/12\varkappa t$ в первом приближении справедливо представление (II.135). При $t > t_1$ необходимо учитывать условие на контуре

$$p(R,\ t) = 0. \quad \text{(II.136)}$$

Используя снова первое приближение разложения (II.131) и полагая $l(t) \equiv R$, получим с учетом (II.136)

$$p(r,\ t) = q \ln(r/R) + P_0(t)(1 - r/R). \quad \text{(II.137)}$$

Тогда из первого интегрального соотношения (II.132) получим

$$\frac{d}{dt}\int_0^R p(r,\ t)\,rdr = \frac{1}{6}R^2\frac{dP_0}{dt} = -\varkappa P_0. \qquad \text{(II.138)}$$

Уравнение (II.138) следует решить при условии непрерывности давления при $t \cong t_1$, $P_0|_{t=t_1} = -q$. Решение имеет вид

$$P_0(t) = -q\exp[-6\varkappa(t-t_1)/R^2]. \qquad \text{(II.139)}$$

Таким образом, будем иметь приближенное выражение для распределения давления

$$p(r,\ t) = q\ln(r/R) - q(1-r/R)\exp[-6\varkappa(t-t_1)/R^2]. \qquad \text{(II.140)}$$

Как видно, распределение давления экспоненциально стремится к стационарному.

§ 5. Нестационарное движение однородных жидкостей. Нелинейные эффекты

Рассмотрим нестационарные изотермические движения газа в пористой среде и эквивалентные им безнапорные движения. При их исследовании выявляются нелинейные эффекты, характерные для многих задач подземной гидродинамики. На примере этих течений также хорошо иллюстрируются методы решения нелинейных задач.

Основные уравнения фильтрации газа. При исследовании фильтрации газа основное значение имеет тот факт, что сжимаемость газа обычно на несколько порядков превышает сжимаемость пористой среды. Поэтому можно пренебречь изменением пористости m в уравнении неразрывности

$$(m\rho)_{,t} + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{u} = 0, \qquad \text{(II.141)}$$

которое приводится к виду

$$m\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{u} = 0. \qquad \text{(II.142)}$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, нужно использовать связь плотности газа с его давлением p и температурой T $\rho=\rho(p,\ T)$, по этой причине в задаче появляется новая переменная T. Для замыкания системы уравнений необходимо добавить еще одно уравнение — уравнение энергии. Однако, если в среде отсутствуют источники выделения или поглощения энергии, то изменения температуры в процессе движения газа настолько малы, что при расчете поля давления газа ими можно пренебречь. Это обстоятельство легко понять, если учесть, во-первых, медленность фильтрационных движений и, во-вторых, наличие теплового балласта — скелета пористой среды, эффективно подавляющего изменения температуры. Будем считать, что

$$\rho = \rho(p,\ T_0) = \rho(p), \qquad \text{(II.143)}$$

где T_0 — постоянная температура.

Уравнения (II.142) и (II.143) и уравнение закона фильтрации

$$\boldsymbol{u} = -(k/\mu)\operatorname{grad} p \qquad \text{(II.144)}$$

образуют замкнутую систему. Исключая скорость фильтрации, имеем

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} = k \operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\mu}\operatorname{grad} p\right). \qquad \text{(II.145)}$$

Ограничимся простейшим случаем, когда газ считается термодинамически идеальным с вязкостью, не зависящей от давления.

$$\rho = p\rho_0/p_0;\ \mu = \text{const}. \qquad \text{(II.146)}$$

При этом уравнение (II.145) преобразуется к виду

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = \frac{kp}{m\mu}\nabla^2 p^2 \text{ или } \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{2m\mu}\nabla^2 p^2. \qquad \text{(II.147)}$$

Эти уравнения — уравнения изотермической фильтрации газа — были впервые получены Л. С. Лейбензоном [26]. Он же указал на их аналогию с уравнениями Буссинеска нестационарного пологого безнапорного движения; эта аналогия позволяет рассматривать исследование двух упомянутых классов движений как единую задачу. Независимо несколько позже аналогичное уравнение было получено Маскетом.

Инвариантные задачи нестационарной фильтрации. Нелинейность задач нестационарной фильтрации газа и безнапорной фильтрации не позволяет использовать разработанный аппарат линейных уравнений математической физики, для которых справедлив принцип суперпозиции решений. Поэтому в теории фильтрации (как и во многих других разделах физики вообще и механики сплошных сред, в частности) уже давно используются своеобразные частные решения, которые выражаются через функции одной переменной. Вначале считалось, что их значение определяется тем, что они описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, решать которые проще, чем уравнения в частных производных. Для различных приближенных методов такие решения часто использовались как эталоны, позволяющие оценить точность метода.

Однако главная их ценность была осознана позднее. Оказалось, что таким путем асимптотически описываются фильтрационные течения для весьма широких классов задач, когда детали граничных и начальных условий перестают быть существенными. Именно эти области часто бывают наиболее интересными (например, спустя незначительное время после начала отбора из скважины, пока воронка депрессии не достигла области влияния соседней скважины и т. д.). Зная такие решения, фактически можно судить, по крайней мере, качественно, об очень широком классе фильтрационных движений (подробнее см. [4]).

Важным свойством рассматриваемых ниже решений является их инвариантность: для одних «автомодельных» — пространственные распределения давлений, напоров, плотностей и т. п. оказы-

ваются во все моменты времени геометрически подобными, для других — кривые изменения этих параметров перемещаются, не меняя формы, с постоянной скоростью и т. д. Это свойство связано с особым характером задач, в которых после выполнения определенных преобразований зависимых и независимых переменных уравнения, граничные и начальные условия задачи остаются неизменными. Как говорят в математике, эти задачи инвариантны относительно некоторой группы непрерывных преобразований. Такие задачи рассматриваются ниже.

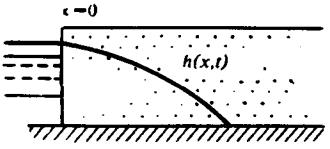


РИС. 8. Кривая распределения напора в горизонтальном пласте

Автомодельные пологие безнапорные движения при нулевом начальном уровне жидкости. Ниже рассмотрим точные решения некоторых нелинейных задач нестационарной фильтрации, характеризующихся нулевым начальным условием. Исследование этого класса движений представляет принципиальный интерес, поскольку в подобных задачах наиболее сильно проявляется существенно нелинейный характер рассматриваемой проблемы и обнаруживаются некоторые свойства нелинейных движений, резко отличающие их от соответствующих линейных задач и неизбежно утрачиваемые при линеаризации.

Для определенности при исследовании задач с нулевым начальным условием рассмотрим безнапорные пологие фильтрационные движения грунтовых вод в первоначально сухом грунте. Согласно обнаруженной Л. С. Лейбензоном аналогии, все получаемые результаты можно непосредственно использовать для задач изотермической фильтрации газа. Излагаемые ниже решения были получены в работах [1, 2, 6].

Рассмотрим полубесконечный пласт, имеющий снизу плоскую горизонтальную непроницаемую границу — водоупор, а со стороны канала — плоскую вертикальную границу (рис. 8), перпендикулярную к оси x и проходящую через точку $x=0$.

Пусть начальный напор жидкости в пласте равен нулю, а напор на вертикальной границе пласта изменяется по степенному закону, начиная с исходного момента $t = t_0$:

$$h(x,\ t_0) = 0,\ h(0,\ t) = \sigma (t - t_0)^{\alpha}, \qquad \text{(II.148)}$$

где $\sigma > 0$; α — некоторая константа, выбираемая в пределах $-1/2 < \alpha < 0$. В частности, константа α может равняться нулю; в этом случае напор на границе мгновенно принимает некоторое значение σ и остается постоянным. В случае фильтрации газа сформулированная задача соответствует его закачке при нулевом начальном давлении в однородный пласт постоянной мощности при изменении давления в начальном сечении пласта по степенному закону.

Линиями равных напоров будут линии $x = \text{const}$, параллельные границе пласта. Таким образом, напор $h(x, t)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2};\quad a = \frac{C}{2m} = \frac{k\rho g}{2m\mu} \tag{II.149}$$

при условии (II.148).

Напор в некоторой точке пласта h зависит от координаты x, времени от начала процесса $t-t_0$, коэффициентов a и σ и константы α. Так как уравнение (II.149) однородно по времени, напор будет зависеть только от разности $t-t_0$, а не от значений t и t_0 в отдельности. Вводя для удобства независимую размерность напора (это возможно, так как для рассматриваемой задачи несущественно, что размерности длины и напора одинаковы) [1], получим размерности этих аргументов в следующем виде:

$$[a] = [h]^{-1}L^2T^{-1},\quad [t-t_0] = T,\quad [x] = L,\quad [\sigma] = [h]\,T^{-\alpha}, \tag{II.150}$$

где $[h]$, L и T — соответственно размерности напора, длины и времени; α — безразмерная константа. Из аргументов, от которых зависит напор жидкости, можно составить только две независимые безразмерные комбинации

$$\xi = x\sqrt{\frac{\alpha+1}{a\sigma(t-t_0)^{\alpha+1}}};\quad \alpha. \tag{II.151}$$

Используя анализ размерностей, выражение для напора можно представить в виде произведения комбинации определяющих параметров, имеющей размерность напора (в качестве нее можно взять $\sigma(t-t_0)^{\alpha}$), на безразмерную функцию от безразмерных комбинаций (II.151). Имеем, таким образом,

$$h = \sigma(t-t_0)^{\alpha}f(\xi,\ \lambda);\ \lambda = \alpha/(1+\alpha), \tag{II.152}$$

где f — безразмерная функция. Параметр λ введен вместо параметра α для удобства последующего изложения. Очевидно, что α лежит в интервале $-1 < \lambda < 1$. Имеем далее

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a\delta(t-t_0)^{\alpha-1}f(\xi,\ \lambda) - \sigma(t-t_0)^{\alpha}x(\alpha+1)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha+1}{a\sigma(t-t_0)^{\alpha+1}}}\frac{df}{d\xi};\quad \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = \frac{\sigma^2(t-t_0)^{2\alpha}(\alpha+1)}{a\sigma(t-t_0)^{\alpha}}\frac{d^2f^2}{d\xi^2}.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (II.149) и условия (II.148) и упрощая, получаем для функции f обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2f^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\xi\frac{df}{d\xi} - \lambda f = 0 \tag{II.153}$$

с условиями

$$f(0,\ \lambda) = 1,\ f(\infty,\ \lambda) = 0. \tag{II.154}$$

[1] Действительно, в данном случае можно было бы вместо напора h ввести пропорциональное ему давление у подошвы пласта $h\rho g$, что не отразилось бы на остальных выкладках.

Напор и объемный поток (расход) грунтовых вод должны быть непрерывными функциями x и t. Используя закон Дарси, имеем для расхода, приходящегося на единицу ширины пласта, выражение

$$-Ch\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{2}C\frac{\partial h^2}{\partial x} = -\frac{C\sigma^{3/2}}{2a}(t-t_0)^{\frac{3\alpha-1}{2}}\sqrt{\alpha+1}\,\frac{df^2}{d\xi}. \quad \text{(II.155)}$$

Таким образом, из требования непрерывности расхода следует непрерывность функции $df^2/d\xi$.

При непрерывной $f(\xi)$ и $f \neq 0$ требование непрерывности функции $df^2/d\xi = 2f df/d\xi$ совпадает с требованием непрерывности производной $f'(\xi)$. Однако при $f = 0$ из непрерывности $df^2/d\xi$ непрерывность $f'(\xi)$ не вытекает. Напротив, как будет видно далее, искомая функция $f(\xi, \lambda)$ имеет в точке, где f обращается в нуль, разрыв первой производной.

Второе условие (II.154) удобнее привести к другому виду. Умножим обе части основного уравнения (II.149) на x и проинтегрируем по x от нуля до бесконечности. В результате получим

$$\int_0^\infty x\frac{\partial h}{\partial t}dx = \frac{d}{dt}\int_0^\infty xh(x,\ t)\,dx = a\int_0^\infty x\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}dx =$$

$$= a\left(x\frac{\partial h^2}{\partial x}\right)_{x=0}^{x=\infty} + a[h^2(0,\ t) - h^2(\infty,\ t) = ah^2(0,\ t).$$

(Очевидно, что $\partial h^2/\partial x$ стремится к нулю при $x \to \infty$ быстрее, чем x^{-1}, в противном случае f не стремилось бы к нулю при $\xi \to \infty$).

Интегрируя в пределах от $t = t_0$ до t при граничном условии (II.148), представив решение в форме (II.152), имеем

$$\int_0^\infty xh(x,\ t)\,dx = \frac{a\sigma^2(t-t_0)^{2\alpha+1}}{\alpha+1}\int_0^\infty \xi f(\xi,\ \lambda)\,d\xi =$$

$$= a\int_{t_0}^{t} h^2(0,\ t)\,dt = \frac{a\sigma^2(t-t_0)^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}$$

(напомним, что α считается удовлетворяющим неравенству $-1/2 < \alpha < \infty$), откуда получаем искомое условие в форме

$$\int_0^\infty \xi f(\xi,\ \lambda)\,d\xi = \frac{1+\alpha}{1+2\alpha} = \frac{1}{1+\lambda}. \quad \text{(II.156)}$$

В интересующей нас области и изменения α и λ правая часть (II.156) конечна и положительна.

Итак, рассматриваемая задача свелась к отысканию решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (II.153) при условиях (II.154) и (II.156), непрерывного и имеющего непрерывную производную от квадрата. Уравнение (II.153) инвариантно относительно группы преобразований

$$\Phi(\xi,\ \mu) = \mu^{-2}f(\mu\xi,\ \lambda), \quad \text{(II.157)}$$

т. е. если $f(\xi, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (II.153), то и $\Phi(\xi, \mu)$ удовлетворяет этому уравнению при произвольном положительном

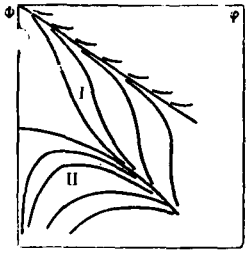


РИС. 9. К исследованию уравнения (II.159)

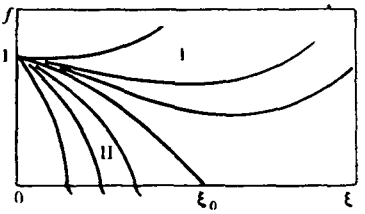


РИС. 10. Интегральные кривые уравнения (II.153)

β, что дает возможность понизить его порядок. Полагая по общему правилу

$$f(\xi, \lambda) = \xi^2\varphi(\eta, \lambda); \quad \eta = \ln\xi, \quad \psi = d\varphi/d\eta \qquad \text{(II.158)}$$

и принимая φ за независимую переменную, получим для функции ψ уравнение первого порядка:

$$d\psi/d\varphi = -[6\varphi^2 + 7\varphi\psi + \psi^2 + 2^{-1}(1-\lambda)\varphi + 4^{-1}\psi]/\varphi\psi. \qquad \text{(II.159)}$$

Исследование этого уравнения показывает [1, 6], что его интегральные кривые разбиваются на I и II классы (рис. 9). Ни одна из таких интегральных кривых не пересекает ось ψ в конечной точке. Кривые I класса вблизи начала координат стремятся к совпадению с прямой линией $\psi = m_0\varphi = -2\varphi(\alpha+1)^{-1}$; на кривых II класса при $\varphi \to 0$ $\psi \to \infty$. Лишь разделяющая эти два класса интегральная кривая сепаратриса пересекает ось ψ в конечной точке. Соответственно этому интегральные кривые уравнения (II.153), удовлетворяющие условию $f(0) = 1$, располагаются, как показано на рис. 10. Кривые I класса при $\xi \to \infty$ изменяются по закону $f = D\xi^{2\lambda}$ ($D \neq 0$ — константа, различная для различных кривых), причем ни одна из них ни в одной точке не пересекает оси абсцисс и, очевидно, не является искомой. Исключением является случай, когда $\alpha = 0$ (рассматриваемый ниже), для которого все кривые I класса имеют горизонтальные асимптоты. На рис. 10 приведены зависимости f от ξ при $\alpha > 0$. Остальные интегральные кривые (кривые II класса) пересекают ось абсцисс в конечных точках, причем под прямым углом. Разделяющая эти два класса интегральная кривая приближается к оси абсцисс в точке $\xi = \xi_0$ под острым углом ν, $0 < \nu < \pi/2$.

Поскольку напор жидкости по физическим соображениям не может быть отрицательным [1], ясно, что искомая функция $f(\xi, \lambda)$ должна каким-то образом комбинироваться из интегральных кривых уравнения (II.153) не принадлежащих к I классу, в той их части, где эти кривые располагаются над осью абсцисс, и из самой оси абсцисс. Однако, если составить функцию $f(\xi, \lambda)$ таким

[1] Математически это является следствием того, что для уравнения (II.147) справедлив принцип максимума, в соответствии с которым решение не может оказаться отрицательным при положительных начальном и граничном условиях.

образом, чтобы она представлялась отрезком некоторой кривой II класса вплоть до точки ξ_C пересечения этой кривой с осью абсцисс и далее самой осью абсцисс, то полученная функция в точке $\xi=\xi_C$ будет иметь разрыв производной от квадрата.

Разрыв производной на графике f^2 от ξ соответствует нарушению непрерывности потока жидкости, что противоречит постановке задачи. Поэтому ни одна из функций $f(\xi, \lambda)$, составленной из интегральной кривой II класса (при $C \neq 0$), продолжаемой на оси абсцисс, не может быть решением.

Искомым решением, непрерывным и обладающим непрерывной производной от квадрата, будет функция, представленная кривой, состоящей из отрезка интегральной кривой, разделяющей кривые I и II классов, вплоть до пересечения ее с осью абсцисс в некоторой точке $\xi = \xi_0$, и совпадающей с осью абсцисс при $\xi \geqslant \xi_0$.

Сама функция непрерывна по построению; проверим непрерывность производной от квадрата в точке пересечения $\xi = \xi_0$ (в остальных точках эта непрерывность не вызывает сомнений, поскольку интегральная кривая состоит из двух участков гладких кривых). При подходе к точке $\xi = \xi_0$ справа, где интегральная кривая совпадает с осью абсцисс, предел $(df^2/d\xi)_{\xi=\xi_0+0}$ равен нулю. При подходе к точке $\xi = \xi_0$ слева предел

$$(df^2/d\xi)_{\xi=\xi_0-0} = (2f df/d\xi)_{\xi=\xi_0-0},$$

с учетом сказанного выше также равен нулю. Таким образом, для построенной функции производная $df^2/d\xi$ непрерывна.

Покажем теперь, что построенная функция удовлетворяет условию (II.156). Умножим обе части уравнения (II.153) на ξ и проинтегрируем в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = \infty$ (или, что то же, до $\xi = \xi_0$, так как при $\xi \geqslant \xi_0$ $f(\xi, \lambda) \equiv 0$). Получим

$$-\lambda \int_0^{\xi_0} \xi f(\xi, \lambda)\, d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{\xi_0} \xi^2 \frac{df}{d\xi}\, d\xi + \int_0^{\xi_0} \xi \frac{d^2 f^2}{d\xi^2} d\xi = 0. \qquad \text{(II.160)}$$

Но вследствие непрерывности f и $df^2/d\xi$ имеем

$$\int_0^{\xi_0} \xi^2 \frac{df}{d\xi} d\xi = \xi^2 f \Big|_0^{\xi_0} - 2 \int_0^{\xi_0} \xi\ f(\xi, \lambda)\, d\xi = -2 \int_0^{\xi_0} \xi f(\xi, \lambda)\, d\xi;$$

$$\int_0^{\xi_0} \xi \frac{d^2 f^2}{d\xi^2} d\xi = \xi \frac{df^2}{d\xi} \Big|_0^{\xi_0} - \int_0^{\xi_0} \frac{df^2}{d\xi} d\xi = f^2(0, \lambda) = 1,$$

откуда и из (II.160) получаем

$$\int_0^{\xi_0} \xi f(\xi, \lambda)\, d\xi = \int_0^{\infty} \xi f(\xi, \lambda)\, d\xi = (1+\lambda)^{-1}, \qquad \text{(II.161)}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, функция $f(\xi, \lambda)$ отличается от нуля лишь при $\xi < \xi_0$, а при $\xi \geqslant \xi_0$ она тождественно равна нулю. Разумеется,

величина ξ_0 зависит от параметра λ. В точке $\xi = \xi_0$ функция $f(\xi; \lambda)$ имеет разрыв первой производной.

Из требования непрерывности функций f и $df^2/d\xi$ и теоремы единственности решения дифференциального уравнения следует, что при составлении функции $f(\xi, \lambda)$ склеивание различных интегральных кривых уравнения (II.153) можно производить только в точках, где $f = 0$, откуда непосредственно вытекает единственность построенной нами функции, т. е. единственность автомодельного решения.

Для эффективного вычисления функции $f(\xi, \lambda)$ удобно поступить следующим образом. Получим (например, численно) решение $\Phi(\xi, \lambda)$ уравнения второго порядка (II.153), обращающееся при $\xi = 1$ в нуль и имеющее в этой точке конечную первую производную, т. е. соответствующее разделяющей интегральной кривой, проходящей через точку $\xi = 1$. Можно показать, что эта производная равна $-1/4$. Функция $\Psi(\xi, \lambda)$, равная $\Phi(\xi, \lambda)$ при $\xi \leqslant 1$ и тождественно равная нулю при $\xi > 1$, непрерывна и имеет непрерывную производную от квадрата, удовлетворяет уравнению (II.153) и условию при $\xi \to \infty$, но условию при $\xi = 0$ не удовлетворяет.

Для получения искомого решения вспомним, что функция

$$f(\xi, \lambda) = \mu^{-2}\Psi(\mu\xi, \lambda) \qquad \text{(II.162)}$$

также удовлетворяет уравнению (II.153) при произвольном $\mu > 0$ и обладает нужными свойствами непрерывности. Выберем теперь $\mu = \mu_1$ таким образом, чтобы функция $f(\xi, \lambda)$ удовлетворяла также и условию $f(0, \lambda) = 1$, тогда полученная функция $f(\xi, \lambda)$ будет удовлетворять всем условиям, налагаемым на искомое решение. Имеем

$$f(0, \lambda) = 1 = \mu_0^{-2}\Phi(0, \lambda) = \mu_0^{-2}N(\lambda),$$

откуда получаем

$$\mu_0 = N^{1/2}(\lambda). \qquad \text{(II.163)}$$

Значение ξ_0, начиная с которого $f(\xi, \lambda) \equiv 0$, очевидно, равно

$$\xi_0 = \mu_0^{-1} = N^{-1/2}(\lambda). \qquad \text{(II.164)}$$

Результаты вычислений $f(\xi, \lambda)$ для ряда значений λ приведены на рис. 11; на рис. 12 представлены функции $\xi_0(\lambda)$ и $M(\lambda) = -df^2(0, \lambda)/d\xi$. Видим, что кривые $f(\xi, \lambda)$, соответствующие $\lambda > 1/2$, обращены вогнутостью вверх; кривая, соответствующая $\lambda = 1/2$, является ломаной, составленной из двух прямых; при $\lambda < 1/2$ кривые $f(\xi, \lambda)$ обращены вогнутостью вниз, причем вплоть до функции, соответствующей $\lambda = -1/2$, производная $f'(0, \lambda)$ отрицательна. Значению $\lambda = -1/2$ соответствует функция

$$f(\xi, -1/2) = 1 - \xi^2/8; \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \sqrt{8}; \quad f(\xi, -1/2) = 0, \quad \xi \geqslant \sqrt{8}, \qquad \text{(II.165)}$$

имеющая $f'(0, -1/2) = 0$. При $\lambda < -\frac{1}{2}$ значения $f'(0, \lambda)$ положительны.

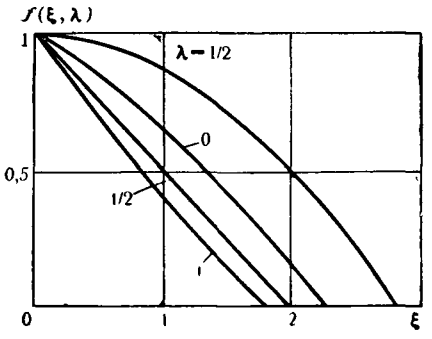


РИС. 11. Функция $f(\xi, \lambda)$

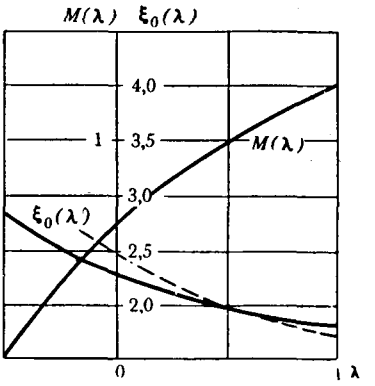


РИС. 12. Функции $\xi_0(\lambda)$, $M(\lambda)$

Функция $\xi_0(\lambda)$ монотонно возрастает с убыванием λ, стремясь к бесконечности при λ, стремящемся к -1 (решение, соответствующее $\lambda = -1$, будет рассмотрено ниже).

Переходя от функции $f(\xi, \lambda)$ к напору жидкости h, получаем, что он отличается от нуля в каждый момент времени лишь в некоторой конечной части рассматриваемой области пористой среды, причем размер этой области со временем увеличивается. Конечность скорости распространения передней границы возмущенной области характерна для рассматриваемого круга задач, отвечающих нулевому начальному условию; она существенно отличает постановку задачи о пологих безнапорных движениях от задач, связанных с классическими линейными уравнениями параболического типа, для которых, как известно, бесконечна скорость распространения переднего фронта возмущенной области.

Эта особенность была впервые обнаружена в работах Я. Б. Зельдовича и А. С. Компанейца (1950) и Г. И. Баренблатта (1952) путем исследования различных автомодельных решений. Г. И. Баренблаттом и М. И. Вишиком (1956) было дано доказательство конечности скорости распространения передней границы возмущенной области для задач пологих безнапорных движений (а также широкого класса более общих задач), соответствующих начальным распределениям напора жидкости, тождественно равным нулю вне некоторой конечной области.

Координата движущегося переднего фронта жидкости для рассматриваемых автомодельных движений выражается формулой:

$$x_0(t) = \xi_0 [a\sigma (t - t_0)^{\alpha+1}/(\alpha + 1)]^{1/2} \qquad (II.166)$$

(поскольку передний фронт соответствует $\xi = \xi_0$); напомним, что параметры α и λ связаны между собой соотношением $\lambda = \alpha/(\alpha + 1)$. Скорость распространения переднего фронта v_0 представляется соотношением

$$v_0 = 2^{-1}\xi_0 [a\sigma (t - t_0)^{\alpha-1} (\alpha + 1)]^{1/2}.$$

В частности, когда напор на границе пласта постоянен, т. е. $\alpha = 0$, то

$$x_0(t) = 2{,}286\sqrt{a\sigma(t-t_0)};\quad v_0 = 1{,}143\sqrt{a\sigma/(t-t_0)}. \qquad (II.167)$$

Далее, для суммарного объемного количества жидкости в пласте M получается следующее выражение:

$$M = \int_0^\infty mh(x,\ t)\,dx = \frac{ma^{1/2}\sigma^{3/2}(t-t_0)^{\frac{3\alpha+1}{2}}}{\sqrt{\alpha+1}}\int_0^{\xi_0} f(\xi,\ \lambda)\,d\xi, \qquad (II.168)$$

а для потока жидкости при $x=0$, т. е. для скорости притока жидкости в пласт, в силу (II. 155) — выражение

$$-\frac{1}{2}C\left(\frac{\partial h^2}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{C}{2a}\sigma^{3/2}(t-t_0)^{\frac{3\alpha-1}{2}}\sqrt{\alpha+1}\left(\frac{df^2}{d\xi}\right)_{\xi=0}. \qquad (II.169)$$

Интегрируя обе части уравнения (II.153) по ξ от $\xi = 0$ до $\xi = \infty$ или, что все равно, до $\xi = \xi_0$, поскольку $f(\xi, \lambda) \equiv 0$ при $\xi > \xi_0$, получаем

$$\int_0^{\xi_0} f(\xi,\ \lambda)\,d\xi = -\frac{2}{1+2\lambda}\frac{df^2}{d\xi}\bigg|_{\xi=0}. \qquad (II.170)$$

В результате формула (II.168) приводится к виду:

$$M = -\frac{2}{1+2\alpha}ma^{1/2}\sigma^{3/2}(1+\alpha)^{1/2}(t-t_0)^{\frac{1+3\alpha}{2}}. \qquad (II.171)$$

Таким образом, предыдущие соотношения показывают, что решения, соответствующие $0 < \alpha < \infty$, т. е. $0 < \lambda < 1$, отвечают возрастанию напора жидкости на границе и общего количества жидкости в пласте; для решения, соответствующего $\alpha = \lambda = 0$, напор жидкости на границе постоянен в ходе всего процесса, количество ее в пласте возрастает. При $-1/3 < \alpha < 0$, т. е. $-1/2 < \lambda < 0$, напор на границе в начальный момент бесконечен и убывает с течением времени до нуля; количество жидкости, первоначально равное, как и во всех предыдущих случаях, нулю, со временем увеличивается. При $\alpha = -1/3$, т. е. $\lambda = -1/2$, напор на границе в начальный момент бесконечен и с течением времени убывает до нуля; общее количество жидкости в пласте постоянно в течение всего процесса — жидкость через границу $x = 0$ в пласт не поступает. Во всех указанных случаях на границе пласта $x = 0$ во всякий момент времени достигается максимальное для этого момента значение напора. При $-1/2 < \alpha < -1/3$, т. е. $-1 < \lambda < -1/2$, напор жидкости на границе в начальный момент бесконечен и с течением времени убывает до нуля. Общее количество жидкости в начальный момент бесконечно велико и с течением времени убывает, стремясь к нулю, так что на границе пласта жидкость уже не втекает в него, как в предыдущем случае, а вытекает. Тогда на границе пласта напор жидкости уже не будет

максимальным; максимальное его значение достигается в некоторой внутренней точке пласта, различной для разных моментов времени.

Рассмотрим частный случай, соответствующий линейному возрастанию напора жидкости на границе пласта, т. е. когда $\alpha = 1$. При этом

$$h(0,\ t) = \sigma(t - t_0),\quad \xi = x\sqrt{2/a\sigma}\,(t - t_0)^{-1}, \tag{II.172}$$

а уравнение (II.153) принимает вид:

$$\frac{d^2f^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\,\xi\,\frac{df}{d\xi} - \frac{1}{2}f = 0. \tag{II.173}$$

Как нетрудно проверить, функция

$$f(\xi,\ 1) = 1 - \xi/2,\quad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 = 2,\ f(\xi,\ 1) = 0,\ \xi_0 \leqslant \xi \tag{II.174}$$

удовлетворяет уравнению (II.173) и всем условиям задачи, откуда получается

$$\begin{gathered} h(x,\ t) = \sigma(t - t_0) - x\,(2a/\sigma)^{-1/2}, \\ 0 \leqslant x \leqslant (2a\sigma)^{1/2}\,(t - t_0); \\ h(x,\ t) = 0,\ (2a\sigma)^{1/2}\,(t - t_0) \leqslant x \leqslant \infty. \end{gathered} \tag{II.175}$$

Координата переднего фронта жидкости $x_0(t)$ и постоянная скорость распространения переднего фронта выражаются следующим образом:

$$x_0(t) = (2a\sigma)^{1/2}(t - t_0),\quad v_0 = (2a\sigma)^{1/2}. \tag{II.176}$$

Таким образом, график распределения напора жидкости в пласте представляется отсекаемым осями координат отрезком прямой линии, перемещающейся параллельно самой себе с постоянной скоростью.

Предельные автомодельные движения. Рассмотрим для того же полубесконечного пласта несколько иную задачу. Будем исследовать движение на полубесконечном интервале времени $(-\infty,\ t)$, поэтому начальное распределение напора по пласту несущественно.

Предположим, что на больших расстояниях от границы пласта, т. е. при $x \to \infty$, напор жидкости равен нулю, следовательно:

$$h(\infty,\ t) = 0. \tag{II.177}$$

Пусть, далее, напор жидкости на границе пласта возрастает со временем по экспоненциальному закону

$$h(0,\ t) = h_0 e^{\varkappa t}, \tag{II.178}$$

а внутри пласта $h\ (x,\ t)$ по-прежнему удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2};\ a = \frac{C}{2m}. \tag{II.179}$$

Составим полный список аргументов, от которых зависит это решение. Помимо координаты x и времени t, в список войдут

также величины h_0, $\varkappa$ и a. Тогда размерности всех определяющих параметров решения представляются в виде:

$$[x] = L,\ [t] = T,\ [a] = [h]^{-1}L^2T^{-1},\ [h_0] = [h],\ [\varkappa] = T^{-1}, \quad \text{(II.180)}$$

где по-прежнему символы L, T и $[h]$ означают, соответственно, размерности длины, времени и напора. Из пяти аргументов (II.180) с тремя независимыми размерностями можно составить две независимые безразмерные комбинации, которые удобно взять в виде $x(\varkappa/ah_0)^{1/2}$, $\varkappa t$. Отсюда и из анализа размерностей получается, что решение рассматриваемой задачи представляется в виде

$$h = h_0\varphi\,[x\,(ah_0/\varkappa)^{-1/2},\ \varkappa t], \quad \text{(II.181)}$$

где φ — безразмерная функция.

Положим $t = t' + \tau$, где τ — произвольная константа. При этом условие (II.177) и уравнение (II.179), как нетрудно проверить, записываются через новую переменную t', так же, как и через прежнюю переменную, а условие (II.178) принимает вид:

$$h\,(0,\ t') = h_0'\,e^{\varkappa t};\ h_0' = h_0\,e^{\varkappa\tau}. \quad \text{(II.182)}$$

Таким образом, сдвиг во времени влияет лишь на некоторое преобразование величины h_0, и постановка задачи оказывается инвариантной по отношению к группе преобразований переноса по времени; для определения h в переменных x, t, a, $\varkappa$, h_0' получается та же задача, что и для определения h в переменных (II.180). Стало быть, на основе соотношений (II.181) и (II.182) имеем

$$h = h_0\varphi\,(x\nu,\ \varkappa t) = h_0'\varphi\,(x\nu,\ \varkappa t') =$$

$$= e^{\varkappa\tau}h_0\varphi\,(x\nu,\ \varkappa t - \varkappa\tau);\ \nu = (\varkappa/ah_0)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что при любом τ справедливо тождество

$$\varphi\,(x\nu,\ \varkappa t) \equiv e^{\varkappa\tau}\,\varphi\,(x\nu\,e^{-1/2\varkappa\tau},\ \varkappa t - \varkappa\tau).$$

Положим $\tau = t$ и получим

$$\varphi\,(x\nu,\ \varkappa t) = e^{\varkappa t}\varphi\,(x\nu\,e^{-1/2\varkappa t},\ 0) = e^{\varkappa t}f\,(x\nu\,e^{-1/2\varkappa t}). \quad \text{(II.183)}$$

Итак, функция h, зависящая от пяти аргументов (II.180), представляется через функцию одного аргумента:

$$h = h_0\,e^{\varkappa t}f\,(\xi);\ \xi = x\nu\exp\,(-1/2\varkappa t). \quad \text{(II.184)}$$

Подставляя (II.184) в основное уравнение (II.179), получаем для функции $f(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2f^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\,\xi\,\frac{df}{d\xi} - f = 0. \quad \text{(II.185)}$$

Подставляя затем выражение (II.184) в (II.177) и (II.178), имеем граничные условия для функции $f(\xi)$:

$$f(0) = 1,\ f(\infty) = 0. \quad \text{(II.186)}$$

Вследствие непрерывности напора и потока жидкости функция $f(\xi)$ по-прежнему должна быть непрерывной и иметь непрерывную

производную от квадрата $df^2/d\xi$. Таким образом, для определения функции $f(\xi)$ получили граничную задачу того же типа, что и граничные задачи для автомодельных решений, рассмотренных в предыдущем пункте, и соответствующую значению параметра α, равному бесконечности, т. е. $\lambda = 1$. Эффективное вычисление функции $f(\xi)$ выполняется способом, указанным выше, результаты вычислений были приведены на рис. 11. Функция $f(\xi) = f(\xi, 1)$ тождественно равна нулю при $\xi \geqslant \xi_0 = 1{,}810$; координата и скорость перемещения переднего фронта составят

$$x_0(t) = 1{,}810\nu\, e^{\varkappa t/2}, \quad v_0(t) = 0{,}905\varkappa\nu\, e^{\varkappa t/2};$$
$$\nu = (ah_0/\varkappa)^{1/2}. \tag{II.187}$$

Полученное решение в некотором смысле предельное для автомодельных решений, рассмотренных в предыдущем пункте. В самом деле, положим в формуле (II.152) $\sigma = h_0(\alpha\tau)^{-\alpha}$, где h_0 — некоторая константа, имеющая размерность напора; τ — константа, имеющая размерность времени. При этом, очевидно, эти константы выбираются с точностью до некоторого постоянного множителя. Решение (II.152) принимает вид

$$h = h_0\left(\frac{t-t_0}{\alpha\tau}\right)^{\alpha} f\left(x\left(\frac{\tau}{t-t_0}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\sqrt{\frac{\alpha^{\alpha}(1+\alpha)}{ah_0\tau}},\ \lambda\right). \tag{II.188}$$

Будем неограниченно увеличивать α при стремлении начального момента t_0 к минус бесконечности по закону

$$t_0 = -\alpha\tau. \tag{II.189}$$

Раскрывая неопределенность, получаем, что при $\alpha \to \infty$

$$\left(\frac{t-t_0}{\alpha\tau}\right)^{\alpha} \to \epsilon\exp\frac{t}{\tau},\ \frac{\alpha^{-\alpha}}{\alpha+1}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^{\alpha+1} \to \exp\frac{t}{\tau},\ \lambda \to 1. \tag{II.190}$$

Уравнение (II.153) в пределе при $\alpha \to \infty$ переходит в (II.185), а условия (II.154) совпадают с (II.186); $f(\xi, \lambda) \to f(\xi, 1) = f(\xi)$.

Обозначая τ через $1/\varkappa$, получаем, что при $\alpha \to \infty$ выражение (II. 188) стремится к (II. 184). Поэтому решение (II. 184) было названо предельным автомодельным решением [2]. Предельные автомодельные решения представляют и принципиальный интерес в том отношении, что для доказательства их автомодельности уже недостаточно соображений анализа размерности, т. е. недостаточно инвариантности постановки задачи относительно группы преобразования подобия величин с независимыми размерностями, как это было в ранее рассмотренных автомодельных задачах, а требуется дополнительно воспользоваться инвариантностью постановки задачи относительно еще одной группы — группы преобразований переноса по времени.

Приведенные при рассмотрении предельной автомодельной задачи рассуждения носят общий характер и могут применяться во многих других задачах. Предельные автомодельные движения существуют всегда, если система основных уравнений рассматривае-

мой задачи имеет автомодельные решения обычного степенного типа с произвольным показателем степени, который может принимать сколь угодно большие значения, и инвариантна относительно преобразования переноса соответствующей координаты [4, 38].

Задача. На границе $x=0$ полубесконечного пласта с непроницаемым горизонтальным водоупором задается поток (расход) жидкости как степенная функция времени

$$-\frac{i}{2} C \left(\partial h^2/\partial x\right)_{x=0} = \tau (t-t_0)^{\beta},\ \beta > -1,\ \tau > 0. \qquad \text{(II.191)}$$

Начальный напор во всем пласте равен нулю.

Решение задачи представляется в виде:

$$h = \left[\frac{6a\tau^2 (t-t_0)^{2\beta+1}}{C^2 M^2(\lambda)(\beta+2)}\right]^{1/3} f\left\{x\left[\frac{2CM(\lambda)(\beta+2)^2}{9a^2\tau (t-t_0)^{\beta+2}}\right]^{1/3}, \lambda\right\}, \qquad \text{(II.192)}$$

где $M(\lambda) = -df^2(0, \lambda)/d\xi$ (см. рис. 13); координата переднего фронта жидкости $x_0(t)$ имеет вид:

$$x_0(t) = \xi_0(\lambda)\left[\frac{9a^2\tau (t-t_0)^{\beta+2}}{2CM(\lambda)(\beta+2)^2}\right]^{1/3}. \qquad \text{(II.193)}$$

Осесимметричные автомодельные движения. При осесимметричных пологих безнапорных движениях напор жидкости удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h^2}{\partial r}\right);\ a = \frac{C}{2m} = \frac{k\rho g}{2m\mu}, \qquad \text{(II.194)}$$

где r — расстояние рассматриваемой точки пласта от оси симметрии.

Пусть в бесконечный пласт, ограниченный снизу горизонтальным водоупором, через скважину, радиус которой пренебрежимо мал, начинается закачка жидкости. Предположим что начальный ее напор в пласте равен нулю, так что начальное условие имеет вид:

$$h(r,\ t_0) = 0. \qquad \text{(II.195)}$$

Предположим далее, что расход закачиваемой жидкости изменяется со временем по степенному закону. Выражение для полного расхода жидкости, закачиваемой через скважину радиусом R, имеет вид:

$$q(t) = 2\pi R\left(-Ch\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=R} = -\pi C\left(r\frac{\partial h^2}{\partial r}\right)_{r=R}. \qquad \text{(II.196)}$$

По предположению, радиус скважины пренебрежимо мал (ниже остановимся на причинах, по которым это допущение можно делать для большинства реальных движений), поэтому можно принять $R=0$. Так как расход жидкости, закачиваемой в скважину, меняется по степенному закону, граничное условие на скважине принимает вид:

$$-\pi C\left(r\partial h^2/\partial r\right)_{r=0} = \tau (t-t_0)^{\beta}, \qquad \text{(II.197)}$$

где $\tau > 0$ и $\beta > -1$. В частности, случай $\beta = 0$ соответствует закачке жидкости в пласт с постоянным расходом. Таким образом,

решение задачи удовлетворяет уравнению (II.194) и условиям (II.195) и (II.197). По-прежнему, используя анализ размерности, можно показать, что это решение автомодельное и представляется в виде:

$$h = \left[\frac{\tau}{\pi C}(t-t_0)^{\beta}\right]^{1/2} f_1(\xi, \lambda), \quad \xi = r\left(\frac{4a^2\tau(t-t_0)^{\beta+2}}{\pi C(\beta+2)^2}\right)^{1/4}; \quad \lambda = \frac{\beta}{\beta+2}. \tag{II.198}$$

Как и прежде, искомая функция должна быть непрерывной и иметь непрерывную производную от квадрата. Подставляя выражение (II.198) в уравнение (II.194) и условия (II.195) и (II.197), находим, что функция $f_1(\xi, \lambda)$ — решение граничной задачи

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{df_1^2}{d\xi}\right) + \frac{1}{2}\xi\frac{df_1}{d\xi} - \lambda f_1 = 0, \quad \xi\frac{df_1^2}{d\xi}\bigg|_{\xi=0} = -1, \quad f(\infty, \lambda) = 0. \tag{II.199}$$

Исследование этой граничной задачи проводится аналогично предыдущему, также единственным образом строится функция $f_1(\xi, \lambda)$, отличающаяся от нуля лишь при $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1(\lambda)$, где $\xi_1(\lambda)$— некоторая функция λ, а при $\xi \geqslant \xi_1(\lambda)$ тождественно равная нулю. Функция $f_1(\xi, \lambda)$, как нетрудно видеть из первого условия (II.199), при $\xi \to 0$ имеет особенность вида

$$f_1(\xi, \lambda) \approx \sqrt{-\ln\xi}, \quad \xi \to 0. \tag{II.200}$$

Второе условие (II.199) может быть приведено к другой форме: умножая уравнение (II.199) на ξ и интегрируя от $\xi = 0$ до $\xi = \infty$, а также используя дополнительно легко устанавливаемые из (II.199) условия $(\xi df_1^2/d\xi)_{\xi=\infty} = 0$, $[\xi f_1(\xi, \lambda)]_{\xi=0} = 0$, получаем следующее интегральное соотношение:

$$\int_0^{\infty} \xi f_1(\xi, \lambda)\, d\xi = \int_0^{\xi_1(\lambda)} \xi f_1(\xi, \lambda)\, d\xi = \frac{1}{1+\lambda}. \tag{II.201}$$

Эффективное вычисление функции $f_1(\xi, \lambda)$ удобно проводить следующим образом. Строится решение задачи Коши $\Phi_1(\xi, \lambda)$ для уравнения (II.199) обращающееся в нуль при $\xi = 1$ и имеющее в этой точке конечную первую производную. (Исследование показывает, что эта производная равна $-1/4$.)

Далее численно определяется величина

$$\lim_{\xi\to 0}\left(\xi d\Phi_1^2/d\xi\right) = -N(\lambda).$$

Величина $N(\lambda)$ оказывается не равной единице, поэтому функция, равная $\Phi_1(\xi, \lambda)$ при $\xi < 1$ и тождественно равная нулю при $\xi > 1$, удовлетворяет всем условиям граничной задачи (II.199), кроме условия в нуле. Воспользуемся теперь тем, что, как нетрудно показать, уравнение (II.199) и второе граничное условие инвариантны относительно группы преобразований

$$\Phi_2(\xi, \lambda) = \mu^{-2}\Phi_1(\xi\mu, \lambda), \tag{II.202}$$

поэтому при произвольном положительном μ функция $\Phi_2(\xi, \lambda)$

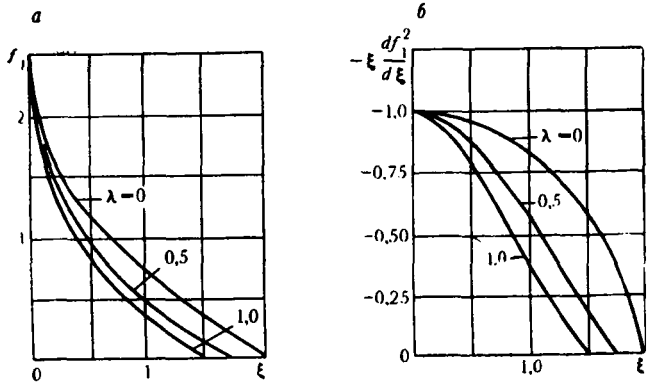


РИС. 13. Функции $f_1(\xi, \lambda)$ и $-\xi df_1^2/d\xi$

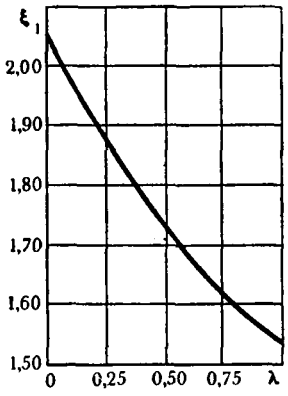


РИС. 14. Функции $\xi_1(\lambda)$

удовлетворяет уравнению (II.199) и второму граничному условию (II.199). Но

$$\left(\xi d\Phi_2^2/d\xi\right)_{\xi=0} = \mu^{-4}\left(\xi d\Phi_1^2(\xi, \lambda)/d\xi\right)_{\xi=0} = -\mu^{-4}N(\lambda).$$

Выбрав $\mu = \mu_* = [N(\lambda)]^{1/4}$, получим, что функция

$$f_1(\xi, \lambda) = [N(\lambda)]^{-1/2}\Phi_1(\xi[N(\lambda)]^{1/4}; \lambda) \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1(\lambda)),$$
$$f_1(\xi, \lambda) = 0, \ \xi_1(\lambda) = [N(\lambda)]^{-1/4} \leqslant \xi < \infty \qquad \text{(II.203)}$$

удовлетворяет всем условиям граничной задачи (II.199).

На рис. 13 и 14 показаны графики $f_1(\xi, \lambda)$ при $\lambda = 0$, 0,5; 1,0, а также график функции $\xi_1(\lambda)$, через которую координата переднего фронта выражается по формуле

$$r_0 = \xi_1(\lambda)\left[\frac{4a^2\tau(t-t_0)^{\beta+2}}{\pi C(\beta+2)^2}\right]^{1/4} = \left[\frac{C\tau(t-t_0)^{\beta+2}}{\pi m^2(\beta+2)^2 N(\lambda)}\right]^{1/4}. \qquad \text{(II.204)}$$

В приложениях особо выделяются движения с постоянным расходом закачки $\beta = 0$. При этом получается

$$h = \left(\frac{\tau}{\pi C}\right)^{1/2} f_1\left[\left(\frac{4\pi m^2}{C\tau}\right)^{1/4}\frac{r}{\sqrt{t-t_0}}, \ 0\right] \qquad \text{(II.205)}$$

$$r_0(t) = 1{,}537\,(a^2\tau/C)^{1/4}\sqrt{t-t_0} = 1{,}087(C\tau/m^2)^{1/4}\sqrt{t-t_0}.$$

Задача о закачке или отборе газа через скважину. Рассмотрим горизонтальный пласт мощности H, вскрытый совершенной скважиной и содержащий в начальный момент газ под давлением $P=\text{const}$. Допустим, что через скважину, радиус которой r_0, начинается закачка или отбор газа с постоянным массовым дебитом q, причем $q>0$ отвечает закачке, а $q<0$ — отбору газа. Тогда имеем

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = \frac{kp}{m\mu}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial p^2}{\partial r}\right);\quad p(r,\ 0) = P,\quad -\frac{\pi k H \rho_0}{\mu p_0}\left(r\,\frac{\partial p^2}{\partial r}\right)_{r=r_0} = q. \qquad \text{(II.206)}$$

Будем считать радиус скважины пренебрежимо малым (ниже приведем оценки, оправдывающие это допущение). Тогда условие (II.206) перепишется в виде:

$$\left(r\,\frac{\partial p^2}{\partial r}\right)_{r=0} = -\frac{\mu q p_0}{\pi k \rho_0 H} = -q^*. \qquad \text{(II.207)}$$

Итак, искомое распределение давления в пласте, удовлетворяющее уравнению (II.147) и условиям (II.206), зависит от определяющих параметров r, t, a^2, q^*, P.

Можно убедиться в автомодельности рассматриваемого движения, так что распределение давления представляется в виде:

$$p = PF_1(\xi,\ \lambda),\quad \xi = r\,(a^2Pt)^{-1/2},\quad \lambda = q^*/P^2, \qquad \text{(II.208)}$$

где функция $F_1(\xi,\ \lambda)$ — решение граничной задачи

$$\frac{d^2F_1^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\,\frac{dF_1^2}{d\xi} + \frac{\xi}{2}\,\frac{dF_1}{d\xi} = 0,\quad \left(\xi\,\frac{dF_1^2}{d\xi}\right)_{\xi=0} = -\lambda,\quad F_1(\infty,\ \lambda) = 1. \qquad \text{(II.209)}$$

Качественная картина расположения интегральных кривых уравнения (II. 209) исследуется аналогично тому, как описано в п. 3.

Исследование показывает, что интегральные кривые, удовлетворяющие второму условию (II.209), распадаются на два класса, разделенные между собой интегральной кривой $F_1(\xi_1\lambda) \equiv 1$, соответствующей, как легко видеть, $\lambda = 0$ (рис. 15). Кривые первого класса, располагающиеся над кривой $F_1(\xi,\ 0) \equiv 1$, с уменьшением ξ до нуля подходят к оси ординат, асимптотически уходя в бесконечность, так что при $\xi \to 0$ функция $F_1(\xi,\ \lambda)$ медленно возрастает по закону

$$F_1(\xi,\ \lambda) = (-\lambda \ln \xi)^{1/2} + O(1). \qquad \text{(II.210)}$$

Каждой из интегральных кривых первого класса соответствует свое значение параметра λ, монотонно возрастающее от нуля до бесконечности по мере удаления от кривой $F_1(\xi,\ 0) \equiv 1$.

При $\xi \to \infty$ ординаты кривых обоих классов быстро стремятся к единице по закону

$$F_1(\xi,\ \lambda) = 1 + O[\xi^{-1}\exp(-8^{-1}\xi^2)]. \qquad \text{(II.211)}$$

Кривые второго класса, располагающиеся под интегральной кривой $F_1(\xi, 0) = 1$, не доходят до оси ординат, а заканчиваются, подходя под прямым углом к оси абсцисс — особой линии уравнения (II.209), поскольку на ней обращается в нуль коэффициент при старшей производной в этом уравнении. В таком случае вместо первого условия, которому удовлетворяют все интегральные кривые первого класса, соответствующие $\lambda > 0$, эти кривые удовлетворяют условию

$$(\xi dF_1^2/d\xi)_{\xi=\bar{\xi}(\lambda)} = -\lambda, \qquad (II.212)$$

где $\bar{\xi}(\lambda)$ — координата точки пересечения рассматриваемой кривой с осью абсцисс. Каждой кривой соответствует определенное значение λ, монотонно убывающее от нуля до $-\infty$ по мере удаления кривых от интегральной кривой $F_1(\xi, 0) \equiv 1$.

Интегральные кривые второго класса описывают автомодельные движения, в процессе которых происходит не нагнетание газа в пласт, как в случае движений, отвечающих интегральным кривым первого класса ($\lambda > 0$), а отбор газа из пласта с расходом, определяемым соответствующей этой кривой величиной λ:

$$q = \lambda \pi k H p_0 P^2/\mu p_0 \qquad (II.213)$$

(в этой формуле масссовый расход q считается отрицательным).

Следует отметить, что, создавая достаточный перепад давления, можно, в принципе, закачивать газ в пласт с любым большим расходом через скважину сколь угодно малого радиуса. Однако отбирать его из пласта можно лишь при расходах, не превышающих того расхода, который соответствует установлению у стенки скважины нулевого давления. Дальнейшее увеличение расхода отбираемого газа возможно только при условии расширения скважины. Таким образом, в отличие от случая закачки газа нельзя ставить задачу об отборе его через скважину пренебрежимо малого радиуса. Кривые $F_1(\xi, \lambda)$ при $\lambda < 0$ (кривые второго класса) соответствуют автомодельным движениям, когда отбор газа с постоянным расходом, определяемым формулой (II. 213), происходит через расширяющуюся скважину с радиусом, увеличивающимся по закону

$$R = \bar{\xi}(\lambda)(a^2 Pt)^{1/2} \qquad (II.214)$$

(причем на стенке этой расширяющейся скважины давление постоянно и равно нулю). Заметим, что расширение отбирающей скважины ни в коей мере не препятствует применению рассматриваемых решений к практическим задачам, поскольку для значений параметра λ, представляющих практический интерес, эта фиктивная скважина, как показывают проведенные расчеты (см. ниже), всегда будет находиться внутри настоящей скважины.

Для дальнейшего изложения полезно выяснить, какой порядок величины λ встречается в практических задачах. Возьмем в качестве примера случай, для которого величина λ будет весьма

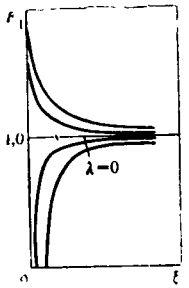


РИС. 15. Интегральные кривые уравнения (II. 209).

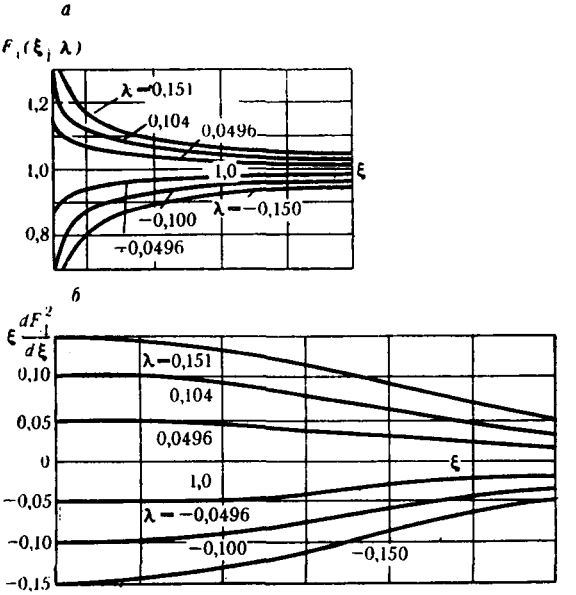


РИС. 16. Функции $F_1(\xi, \lambda)$ и $-\xi dF_1^2/d\xi$

высокой, этим самым определится порядок верхнего предела значений λ. Пусть через скважину отбирается 1 000 000 м^3 газа в сутки (имеется в виду объем при нормальных условиях); такой расход достаточно высокий. Пусть, далее, вязкость газа μ равна 0,01 мПа·с, проницаемость пористой среды $k = 10^{-12}$ м^2, мощность пласта $H = 10$ м, начальное пластовое давление $P = 3$ МПа (относительно небольшое давление для столь высокого отбора газа); считаем, что плотность ρ_0 соответствует $p_0 = 0{,}1$ МПа. Таким образом, q/ρ_0 — есть заданный объемный расход газа, отбираемого через скважину. Переходя к одинаковым единицам измерения и подставляя приведенные параметры в выражение для λ, получим $\lambda \approx 0{,}04$. Стало быть, в реальных случаях параметр λ равен 0,01—0,02 и менее.

На рис. 16 изображены кривые $F_1(\xi, \lambda)$, отвечающие нескольким значениям параметра λ, как положительным, так и отрицательным, а также соответствующие кривые $-\xi dF_1^2/d\xi$. Из этих кривых видно, что в довольно значительной области вблизи точки $\xi = 0$ (соответственно вблизи $\xi = \bar{\xi}(\lambda)$ для кривых, отвечающих $\lambda < 0$) функция $-\xi dF_1^2/d\xi$ близка к своему значению при $\xi = 0$ (соответственно при $\xi = \bar{\xi}(\lambda)$, т. е. к λ. При этом основное изменение функции $F_1(\xi, \lambda)$, т. е. основное изменение давления газа, сосредоточивается именно в этой области. При тех же значениях ξ, для которых функция $-\xi dF_1^2/d\xi$ уже существенно отклоняется от λ, функция $F_1(\xi, \lambda)$ оказывается достаточно близкой к единице. В практически наиболее интересной области значений параметра λ, равных по абсолютной величине одной сотой и менее, это свойство постоянства функции $-\xi dF_1^2/d\xi$ в области, где $F_1(\xi, \lambda)$ суще-

ственно отличается от единицы, выражено еще более резко. Обозначим через ξ_* значение аргумента ξ, обладающее тем свойством, что при $\xi < \xi_*$ значения $-\xi dF_1^2/d\xi$ отличаются от λ меньше, чем на 0,01%. Стало быть, при $\xi \leqslant \xi_*$ с этой же степенью точности выполняется соотношение

$$\xi dF_1^2/d\xi = -\lambda; \quad F_1^2(\xi, \lambda) - F_1^2(\xi_*, \lambda) = -\lambda \ln \xi/\xi_*. \qquad (II.215)$$

Проведенные численные расчеты показывают, что при $|\lambda| < 0{,}01$ величина $F_1(\xi_*, \lambda)$ отличается от единицы менее чем на 0,03, так что при $\xi \geqslant \xi_*$ справедливо неравенство $0{,}97 < F_1(\xi, \lambda) < 1$.

Отсюда следует, что с практически вполне достаточной точностью в этой области уравнение (II.209) для функции $F_1(\xi, \lambda)$ можно заменить линейным относительно $F_1^2(\xi, \lambda)$ уравнением

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{dF_1^2}{d\xi}\right) + \frac{1}{4}\xi\frac{dF_1^2}{d\xi} = 0. \qquad (II.216)$$

В последнем слагаемом добавлен множитель $F_1(\xi, \lambda)$, согласно предыдущему, мало отличающийся от единицы. Линейное уравнение (II.216) легко интегрируется, в результате получим

$$\xi dF_1^2/d\xi = C \exp(-\xi^2/8), \qquad (II.217)$$

где C — константа интегрирования. Определим эту константу из условия, что при $\xi = \xi_*$ величина $\xi dF_1^2/d\xi = -\lambda$. Имеем

$$C = -\lambda \exp(-\xi_*^2/8).$$

Так как для рассматриваемой практически интересной области $|\lambda| < 0{,}01$, значение ξ^* весьма мало ($< 0{,}01$) и $\exp(-1.8\xi_*^2)$ отличается от единицы не более чем в шестом десятичном знаке, то можно полагать $C = -\lambda$.

Интегрируя уравнение (II.217), получаем при $\xi \geqslant \xi_*$

$$F_1^2(\xi, \lambda) = D - \lambda \int \xi^{-1} \exp(-\xi^2/8)\, d\xi. \qquad (II.218)$$

Находя константу интегрирования из условия $F_1(\infty) = 1$, получим

$$F_1^2 = 1 - 1/2\lambda \,\mathrm{Ei}(-1/8\xi^2). \qquad (II.219)$$

Находя из (II.219) $F_1(\xi_*, \lambda)$ и подставляя в (II.215), получим

$$F_1^2 = 1 - 1/2\lambda \,\mathrm{Ei}(-1/8\xi_*^2) - \lambda \ln(\xi/\xi_*). \qquad (II.220)$$

При малых ξ имеем асимптотическое выражение

$$\mathrm{Ei}(-1/8\xi^2) = \ln(\gamma\xi^2/8),$$

так что

$$\ln(\xi/\xi_*) = 1/2\left[\mathrm{Ei}(-\xi^2/8) - \mathrm{Ei}(-\xi_*^2/8)\right].$$

Подставляя это выражение в (II.220), находим:

$$F_1^2 = 1 - 1/2\lambda \,\mathrm{Ei}(-\xi^2/8) \quad (\xi \leqslant \xi_*). \qquad (II.221)$$

Сравнивая выражения (II.219) и (II.221), видим, что они совпадают. Отсюда следует весьма существенный вывод о том, что в

практически наиболее интересном интервале значений параметра λ $|\lambda| < 0{,}01$ функция $F_1(\xi, \lambda)$ представляется в виде (II.219) при всех значениях ξ.

Переходя от функции $F_1(\xi, \lambda)$ к давлению p по формуле (II.208), получаем, что распределение давления с весьма высокой степенью точности представляется для всех значений r и t в виде:

$$p^2 = P^2\left[1 - \lambda \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{8a^2Pt}\right)\right]; \quad -0{,}01 < \lambda = \frac{\mu q p_0}{\pi k H \rho_0 P^2} < 0{,}01. \quad \text{(II.222)}$$

Именно таким получилось бы решение задачи, если бы мы заменили в уравнении (II. 206) множитель p в правой части на значение $p = P$ этого множителя при $r = \infty$, т. е. если бы при тех же граничных и начальных условиях перешли к линейному относительно p^2 уравнению

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = \frac{2a^2P}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p^2}{\partial r}\right). \quad \text{(II.223)}$$

Такой способ линеаризации уравнения (II. 206) был впервые предложен Л. С. Лейбензоном [26]. Приведенные расчеты показывают практически точное совпадение решения расматриваемой нелинейной осесимметричной задачи с решением линеаризованной задачи. Успех линеаризации объясняется в данном случае тем, что в случае осесимметричных движений область разбивается на две части: 1) область квазистационарного движения, соответствующая малым значениям ξ, в которой сосредоточивается основная часть всего перепада давления, но поток газа почти постоянен, и 2) область малых депрессий (перепадов давления), в которой поток газа сравнительно медленно уменьшается, а перепады давлений малы.

В области квазистационарного движения не только разность величин $r\partial p^2/\partial t$ и $2a^2 p \partial (r\partial p^2/\partial r)/\partial r$ равна нулю, как это следует из уравнения (II.206), но и каждая из них сама по себе исчезающе мала (сравнительно со значениями этих величин в тех точках, где они максимальны). Поэтому в этой области поток газа, равный $-\pi k \rho_0 H (\mu p_0)^{-1} r\partial p^2/\partial r$, почти постоянен, а значение множителя при втором члене уравнения (II.206) несущественно, и с большой степенью точности можно заменить в этом множителе $p(r, t)$ на P. В области же малых депрессий, в определенной части которой оба члена уравнения (II.206) существенно отличаются от нуля, возможность такой замены обусловливается малостью разности $p(r, t) - P$.

Обнаруженная допустимость линеаризации уравнений при описании нелинейных осесимметричных движений вне зависимости от возникающего перепада давления позволяет сделать важные выводы применительно к более общим классам движения. Эти выводы связаны с малостью безразмерного параметра λ — безразмерного расхода — и могут быть в общем виде установлены применением широко известной техники сращиваемых асимптотических разложений.

Заметим теперь, что в реальных задачах задается поток газа через скважину, хотя и малого, но конечного фиксированного радиуса, так что граничное условие на скважине имеет вид (II. 206).

Покажем, что построенное выше автомодельное решение удовлетворяет с большой степенью точности этому условию уже спустя несколько секунд после начала процесса.

В самом деле, на основании (II. 208) имеем

$$\left(r\frac{\partial p^2}{\partial r}\right)_{r=R} = P^2\left(\xi\frac{dF_1^2}{d\xi}\right)_{\xi=R/\sqrt{a^2Pt}}. \qquad \text{(II.224)}$$

Однако из сказанного выше следует, что при малых λ значение функции $\xi dF_1^2/d\xi$ близко к $-\lambda$ при всех ξ, не превосходящих нескольких десятых.

При радиусе скважины $R \approx 10$ см, проницаемости $k = 10^{-12}$ м^2, пористости $m \approx 0{,}2$, вязкости $\mu = 0{,}01$ мПа·с величина $a^2P = kP/2m\mu$ имеет порядок $10^3 - 10^4$ см^2/с, и тогда уже при $t = 3$ с

$$\xi = R\,(a^2Pt)^{-1/2} < 0{,}2.$$

Поэтому можно с весьма высокой степенью точности полагать при $t > 3$ с

$$(\xi dF_1^2/d\xi)_{\xi=R(a^2Pt)^{-1/2}} = -\lambda.$$

Используя это обстоятельство, в соотношении (II. 224) получаем, что спустя несколько секунд после начала движения автомодельное решение с большой степенью точности удовлетворяет граничному условию (II. 207).

Как было показано, встречающиеся на практике значения параметра λ по модулю значительно меньше, чем рассмотренное только что, примерно равное — 0,08. Поэтому для меньших λ это условие будет удовлетворяться еще быстрее.

Выше было отмечено, что автомодельные решения при $\lambda < 0$ соответствуют отбору газа из пласта через расширяющуюся со временем скважину. Покажем теперь, что это неестественное, на первый взгляд, свойство решений не препятствует применению их к реальным задачам, поскольку для представляющего практический интерес времени расширяющаяся (фиктивная) скважина всегда остается внутри настоящей скважины. Для этого определим порядок величины $\bar{\xi}(\lambda)$ — координаты точек подхода кривой $F_1(\xi, \lambda)$ при $\lambda < 0$ к оси абсцисс. Как было отмечено, при $\xi \leqslant \xi_*$, т. е., в частности, при $\xi = \bar{\xi}(\lambda)$, функция $F_1(\xi, \lambda)$ с высокой степенью точности удовлетворяет соотношению

$$F_1^2(\xi, \lambda) - F_2^2(\xi_*, \lambda) = -\lambda \ln(\xi/\xi_*).$$

Полагая $\xi = \bar{\xi}(\lambda)$, $F_1(\xi, \lambda) = 0$, получаем

$$F_1^2(\xi_*, \lambda) = \lambda \ln(\bar{\xi}/\xi_*); \quad \bar{\xi}(\lambda) = \xi_* \exp\left[\lambda^{-1}F_1^2(\xi_*, \lambda)\right].$$

При $|\lambda| < 0{,}08$, $F_1(\xi_*, \lambda) = 0{,}72$, $\lambda < 0$ значение $\xi_* = 0{,}0050$, откуда $\bar{\xi}(\lambda) \approx 0{,}005\,e^{-6{,}5} = 0{,}75 \cdot 10^{-5}$. Как показывает формула

(II.214), промежуток времени T, за который расширяющаяся внутренняя скважина достигает размера настоящей скважины, составляет

$$T = R^2 (a^2 \bar{\xi}^2 P)^{-1}.$$

С учетом предыдущих оценок для $\bar{\xi}$, $a^2 P$ и R получим примерно $T \approx 2 \cdot 10^8$ с — около шести лет. Отметим, что значение $|\lambda| = 0{,}08$ очень велико сравнительно со значениями, встречающимися на практике. При уменьшении $|\lambda|$ величина T резко возрастает: так, при $\lambda = 0{,}01$ $T = 10^{75}$ лет. Таким образом, для реальных задач расширяющаяся (фиктивная) скважина всегда остается внутри настоящей.

Приведенные оценки показывают, что рассматриваемое автомодельное решение вполне пригодно для реальных задач.

Автомодельность расматриваемой задачи была отмечена Л. С. Лейбензоном и П. Я. Полубариновой-Кочиной. Изложенное решение этой задачи дано Г. И. Баренблаттом.

Задача 1. Пусть проницаемость и пористость пористой среды, плотность и вязкость газа — функции давления. Вводя функцию

$$P(p) = \int \frac{k\rho}{\mu} dp, \tag{II.225}$$

называемую функцией Лейбензона, привести уравнение движения газа к виду

$$\partial P / \partial t = \varkappa(P) \nabla^2 P. \tag{II.226}$$

Показать, что при обычных значениях дебитов динамику изменения давления в газовой скважине можно описать, заменяя переменный коэффициент в правой части уравнения $\varkappa(P)$ постоянным $\varkappa_0 = \varkappa(P_0)$, отвечающим начальному значению давления (линеаризация по Л. С. Лейбензону).

Задача 2. В большинстве случаев зависимости параметров пористой среды и газа (жидкости) от давления с достаточной точностью могут быть приближены экспоненциальными функциями ($k = k_0 e^{\alpha_k p}$ $m = m_0 e^{\alpha_m p}$) и т. д. Показать, что уравнение для давления в этом случае эквивалентно уравнению политропической фильтрации газа

$$\partial p / \partial t = a^2 \nabla^2 p^{n+1}. \tag{II.227}$$

Задача 3. Используя методы, изложенные в §§ 4 и 5 данной главы, найти способы определения параметров пласта по кривым изменения давления в газовых скважинах.

Задача 4. Рассмотрим уравнение (II.227) для радиально-симметричного движения. Допустим, что начальное давление в пласте пренебрежимо мало, а в начальный момент в скважину быстро закачивается конечное количество жидкости M («мгновенный источник»), так что искомое решение удовлетворяет условиям

$$p(r, 0) = 0, \quad \int_0^\infty p(r, t)\, r dr = M_0. \tag{II.228}$$

Показать, что движение автомодельно и соответствующее ему распределение давления дается соотношением

$$p = p^* f_1(\xi); \quad \xi = \frac{r}{p^* a^{3/2} t^{3/4}}; \quad p^* = \left(\frac{M_0}{2\pi a^2 t} \right)^{1/2};$$

$$f_1 = (l^2 - \xi^2)/12; \quad 0 \leqslant \xi \leqslant l = 8; \quad f_1 = 0, \ \xi > l. \tag{II.229}$$

Дать обобщение этой постановки и результата на прямолинейно-параллельное и сферически-симметричное движения.

ГЛАВА 3

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

§ 1. Теория фильтрации неньютоновских жидкостей. Закон фильтрации

Неньютоновские жидкости. Аномальными или неньютоновскими называются жидкости, не следующие классической модели вязкой жидкости [35]. Наиболее простые из них нелинейно-вязкие жидкости, для которых девиатор тензора напряжений однозначно определяется девиатором тензора скоростей деформаций, они соосны, но зависимость между ними нелинейна. При простом сдвиге это проявляется в нелинейности кривой течения, связывающей касательное напряжение τ и скорость сдвига $\dot{\gamma}$ (рис. 17):

$$\tau = F(\dot{\gamma}); \quad \dot{\gamma} = \Gamma(\tau). \tag{III.1}$$

Нас будут прежде всего интересовать структурирующиеся нелинейно-вязкие жидкости, способные образовывать твердообразные структуры, разрушающиеся при увеличении интенсивности деформации. Такие жидкости являются псевдопластическими: кривая $\dot{\gamma} = \Gamma(\tau)$ для них выпукла к оси τ: $\Gamma''(\tau) \geqslant 0$. Крайнее проявление псевдопластичности описывается известной моделью вязко-пластической жидкости, определяемой соотношениями Бингама — Шведова:

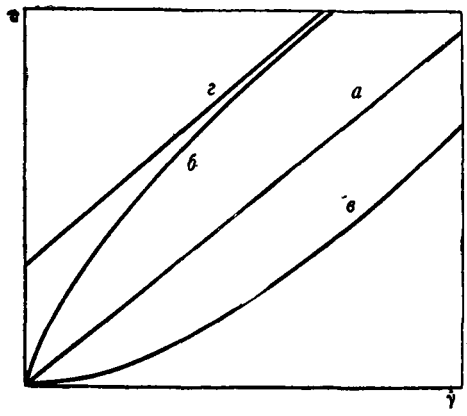
$$\dot{\gamma} = \eta^{-1}(\tau - \tau_0), \quad \tau > \tau_0,$$
$$\dot{\gamma} = 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0. \tag{III.2}$$

Здесь τ_0 — предельное напряжение сдвига; η — структурная вязкость.

Для описания экспериментальных данных, особенно в небольшом диапазоне изменения переменных, часто используется и степенная зависимость вида

$$\tau = K\dot{\gamma}^n. \tag{III.3}$$

РИС. 17. Кривые течения ньютоновской (*а*), псевдопластической (*б*), дилатантной (*в*) и бингамовской (*г*) жидкостей



Для ряда аномальных систем модель нелинейно-вязкой жидкости оказывается непригодной. Если напряжения зависят не только от текущего значения тензора скоростей деформации, но и от предыстории деформирования данного жидкого элемента, вполне ею определяясь, то такая жидкость называется простой. Частный случай простых жидкостей — упруго-вязкие жидкости, например, простейшая линейная жидкость Максвелла, для которой связь между τ и $\dot{\gamma}$ при простом сдвиге определяется дифференциальным уравнением

$$\mu\dot{\gamma} = \tau + \theta\dot{\tau}. \qquad \text{(III.4)}$$

где постоянная величина θ называется временем релаксации. Очевидно, при медленном изменении напряжений тело Максвелла подобно ньютоновской жидкости с вязкостью μ, а при быстром — упругому телу с модулем сдвига $G=\mu/\theta$. При движении упругих жидкостей могут накапливаться большие упругие деформации. В результате реологические аномалии упруго-вязких жидкостей проявляются по-разному при сдвиговом течении (например, в зазоре вискозиметра), когда эффективная вязкость уменьшается с ростом скорости сдвига, и при одноосном растяжении. В последнем случае при достаточно больших скоростях деформации «продольная вязкость» жидкости, определяемая по отношению действующего в сечении напряжения к скорости удлинения, резко возрастает.

Заметим, что все сказанное выше относилось к несжимаемым или капельно-сжимаемым жидкостям, и, скажем, упругость жидкости — это сдвиговая упругость, которая может не иметь ничего общего с объемной упругостью (сжимаемостью) жидкости. Особенно важно, что характерные значения модулей сдвига G могут быть на много порядков меньше модуля объемного сжатия Kv. Так, для используемых в процессах повышения нефтеотдачи полимерных растворов значения G и K_V имеют порядки, соответственно, 1—100 Па и 10^9 Па $= 10^3$ МПа. Это позволяет рассматривать реологию объемных и сдвиговых деформаций независимо.

Наконец, укажем, что в некоторых случаях нам приходится сталкиваться с системами и явлениями, не укладывающимися и в понятие «простой жидкости». Мы имеем здесь в виду в первую очередь системы, имеющие характер коллоидных растворов, внутренняя структура которых может перестраиваться под действием обменных и физико-химических процессов. К таким системам относятся водо-глинистые растворы, ряд растворов полимеров и, по-видимому, некоторые нефти. К сожалению, в большинстве случаев не существует пока адекватного описания таких систем.

Закон фильтрации неньютоновской жидкости. Нелинейно-вязкие системы. Чтобы исследовать проявления неньютоновских эффектов при движении в пористой среде, необходимо прежде всего установить вид закона фильтрации для

неньютоновской жидкости. Из-за большого разнообразия аномальных жидкостей единого ответа на этот вопрос не существует.

Наиболее просто обстоит дело для нелинейно-вязких жидкостей. Для них связь между характеристиками течения в пористой среде и стандартной реологией жидкости удается с удовлетворительной точностью получить, моделируя пористую среду системой капилляров, подсчитывая среднюю скорость сдвига и напряжение на стенке капилляра и считая, что эти две величины связаны между собой кривой течения для данного материала.

Обозначим через τ_w напряжение на стенке капилляра радиуса R, через $\dot{\gamma}_m = U/R = 4Q/\pi R^3$ — характерную скорость сдвига. Тогда для течения в капилляре имеем

$$\dot{\gamma}_m = \varphi(\tau_w) = 4\tau_w^{-3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 \Gamma(\tau)\, d\tau, \qquad \text{(III.5)}$$

где $\Gamma(\tau)$ — зависимость скорости сдвига от касательного напряжения, определяемая кривой течения. Для описания движения аномальных жидкостей часто пользуются понятием эффективной вязкости $\eta_{эф}$

$$\eta_{эф} = \tau_w/\dot{\gamma}^* = \tau_w/\varphi(\tau_w), \qquad \text{(III.6)}$$

зависящей от скорости сдвига или касательного напряжения.

Для пористой среды среднюю скорость сдвига $\dot{\gamma}_m$ и среднее касательное напряжение τ^* можно определять по-разному. Из соображений размерности очевидно, что

$$\dot{\gamma}^* = \chi(m)\, u/d, \quad \tau^* = \zeta(m)\, d\,|dp/dx|, \qquad \text{(III.7)}$$

где u — модуль скорости фильтрации; dp/dx — градиент давления; d — внутренний масштаб пористой среды; χ и ζ — безразмерные функции пористости, обычно определяемые на основе приближенного моделирования порового пространства пучком капилляров. Так, для слоя сферических частиц диаметром D полагают обычно

$$d = D, \quad \chi = 12(1-m)/m^2, \quad \zeta = m/[15(1-m)].$$

Эти соотношения переносятся с помощью формулы Козени — Кармана (I.8) на произвольную пористую среду проницаемости k

$$d = (k/m)^{1/2}, \quad \chi = 0{,}9/m, \quad \zeta = 0{,}9.$$

Таким способом для ряда систем получаются вполне приемлемые результаты. Так, на рис. 18 приведены данные для раствора поливинилового спирта [39]. Другие примеры можно найти в обзоре [39], цитированных там статьях и последующих публикациях.

К числу нелинейно-вязких систем, исследованных подробно в последние годы, относятся нефти ряда месторождений Советского Союза. Интерес к их исследованию вызван тем, что было обнаружено, что они при определенных условиях ведут себя как псевдопластические системы. Кривые течения этих нефтей в оп-

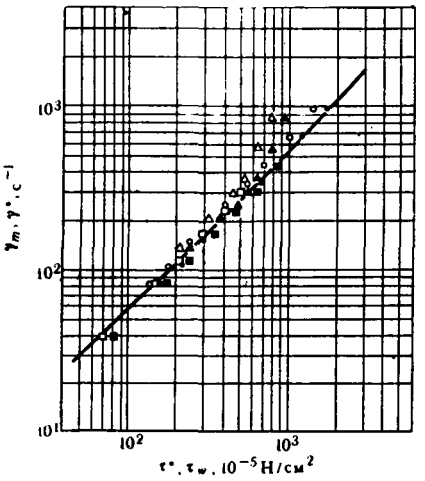


РИС. 18. Зависимость скорости сдвига от эффективного напряжения при течении в капиллярном вискозиметре и в пористой среде

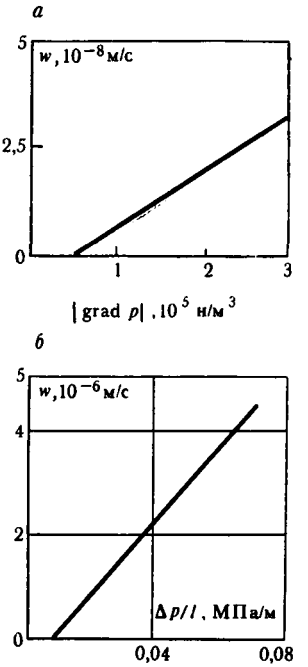


РИС. 19. Зависимость скорости фильтрации от градиента давления (закон фильтрации):

а — движение воды в глине; *б* — течение вязкопластической нефти через образец пористой среды

ределенном диапазоне скоростей сдвига могут быть описаны уравнениями Бингама — Шведова (III. 2).

Достаточно очевидно, что жидкости, обладающие отличным от нуля предельным напряжением сдвига τ_0, могут начать двигаться в пористой среде лишь тогда, когда градиент давления превзойдет некоторое пороговое значение G, называемое начальным или предельным градиентом давления.

Из соображений размерности

$$G \simeq C\tau_0 k^{-1/2}, \tag{III.8}$$

где C — постоянная.

В соответствии с гипотезой о подобии течения в пористой среде и в капилляре особенности движения вязко-пластических жидкостей в пористой среде можно описать соотношениями закона фильтрации с предельным градиентом давления

$$w = -\frac{k}{\mu}(\nabla p - G\nabla p/|\nabla p|), \quad |\nabla p| > G, \tag{III.9}$$

$$w = 0, \quad |\nabla p| \leqslant G.$$

Соотношения (III. 8) и (III. 9) для описания фильтрации вязко-пластических жидкостей были предложены А. Х. Мирзаджанзаде [28], причем постоянная C имеет порядок $\sim 10^{-2}$. Формула,

аналогичная (III. 9), использовалась как эмпирическое уравнение закона фильтрации воды в глинах (рис. 19).

Сходная «псевдопластическая» картина наблюдается при фильтрации ряда нефтей воды в глинизированных породах, а также при движении обычных ньютоновских жидкостей и газа в глинизированных породах, содержащих остаточную воду.

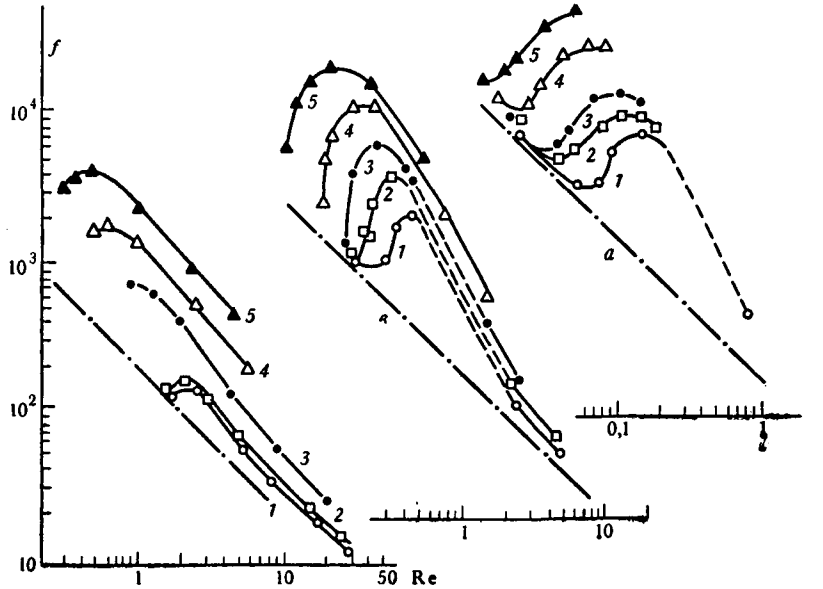
Вязкоупругие эффекты. Часто при попытке предсказать расходную характеристику образца пористой среды по кривой течения жидкости на основе капиллярной модели получаются результаты, не согласующиеся с опытом даже качественно. Весьма характерны в этом отношении многочисленные данные по растворам полиоксиэтилена. На рис. 20 показаны зависимости коэффициента сопротивления $f=64(\Delta p/l)k/D\rho w^2$ от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=wD\rho/\mu$ для раствора полиоксиэтилена WSR-301 с молекулярной массой $3\cdot 10^6$ ряда концентраций, определяемые из опыта по движению в пористой среде, состоящей из шариков разного диаметра D.

Заметим, что при течении в капилляре эффективная вязкость исследованных растворов остается практически постоянной, так что теоретическая зависимость имеет вид $f\sim \mathrm{Re}^{-1}$.

При движении в пористой среде «вязкость», начиная с некоторой скорости сдвига, сильно растет и во много раз превосходит начальную вязкость раствора. Подобные же данные получены и

РИС. 20. Зависимость f (Re) для раствора полиоксиэтилена WSR-301. Концентрация полимера:

1 — $10\cdot 10^{-6}$; *2* — $20\cdot 10^{-6}$; *3* — $40\cdot 10^{-6}$; *4* — $80\cdot 10^{-6}$; *5* — $160\cdot 10^{-6}$. Диаметр шариков в мм: *а* — 0,11; *в* — 0,22; *с* = 0,45



для сцементированной пористой среды, а также в опытах по движению полимерных растворов через трубки переменного радиуса, моделирующие последовательность сужений и расширений поровых каналов. Естественно, все эти результаты нельзя объяснить с помощью капиллярной модели пористой среды. Гораздо проще их понять, если учесть, что элемент жидкости в поровом пространстве проходит через последовательность сужений и расширений, и поэтому вынужден изменять свою форму с частотой $\sim w/mD$. Если эта частота становится достаточно большой ($w\Theta/mD \sim 1$), то существенными становятся упругие эффекты, сопротивление деформации возрастает, и это объясняет наблюдаемое приращение сопротивления в области достаточно больших скоростей фильтрации. Таким образом, интуитивно легко связать наблюдаемый рост эффективной вязкости с упругостью жидкости. Имеются попытки количественнного расчета этого эффекта. Они основаны на рассмотрении движения в сужениях как аналога растяжения и указывают на известное возрастание вязкости при больших скоростях растяжения как на причину повышенного сопротивления движению упругих жидкостей в пористой среде.

Полимерные растворы, наряду с эффектами вязкоупругости, проявляют при движении в пористой среде и аномалии, обусловленные их микрогетерогенностью и способностью сорбироваться в скелете пористой среды, изменяя ее гидравлическое сопротивление. Это приводит к ряду медленных нестационарных явлений, интенсивно исследуемых в настоящее время [29, 30, 20]. В данной книге мы ограничимся изучением фильтрационных аномалий, связанных с нелинейностью закона фильтрации.

§ 2. Стационарные задачи фильтрации неньютоновских жидкостей

Из сказанного в § 1 данной главы следует, что основная особенность движения неньютоновских жидкостей в пористой среде — нелинейность закона фильтрации. Для структурирующихся систем это типичная псевдопластическая нелинейность, при которой подвижность увеличивается с увеличением скорости фильтрации; качественная модель и крайнее выражение ее соответствуют закону фильтрации с предельным градиентом (III. 9). Поэтому подземная гидродинамика неньютоновских жидкостей это прежде всего теория движений, не следующих закону Дарси.

В этом параграфе кратко изложены подходы и результаты теории стационарной фильтрации неньютоновских жидкостей; в следующем сделано то же применительно к неустановившимся движениям.

Основные уравнения и общие утверждения. Уравнение нелинейного закона фильтрации несжимаемой жидкости в изотропной пористой среде можно представить в виде [43]

$$\nabla H = -\Phi(w)\,\boldsymbol{w}/w;\quad \Phi(0) = \lambda \geqslant 0,\quad \Phi'(w) \geqslant 0,\quad 0 \leqslant w < \infty. \qquad \text{(III.10)}$$

Если $\lambda > 0$, то имеется предельный градиент давления и подразумевается, что при $|\nabla H| \leqslant \lambda$ движение отсутствует ($w \equiv 0$); если $\lambda = 0$, движение происходит при любом перепаде напора.

Уравнение (III.10) вместе с уравнением неразрывности

$$\nabla \boldsymbol{w} = 0 \qquad \text{(III.11)}$$

образует систему уравнений фильтрации неньютоновских жидкостей. Граничные условия для этой системы формулируются так же, как в обычных задачах стационарной фильтрации, следующей закону Дарси (см. § 1, гл. II).

Поскольку система (III. 10) — (III. 11) нелинейна и функция Ф может иметь различный вид для различных систем жидкость — пористая среда, основная цель исследования заключается в отыскании достаточно общих подходов и фактов. Для фильтрационных течений неньютоновских жидкостей сохраняют силу основные качественные свойства напорных фильтрационных течений, сформулированные в § 2 гл. II.

Рассмотрим течение в неоднородной среде и будем полагать, что неоднородность среды полностью характеризуется зависимостью от координат параметра $\rho = \rho(x, y, z)$, называемого далее параметром сопротивления. Этот параметр — дополнительный аргумент в уравнении закона фильтрации.

Обозначим

$$\boldsymbol{h} = \nabla H, \quad h = |\boldsymbol{h}|, \quad h = \Phi(w, \rho), \quad w = \Psi(h, \rho), \quad \Phi_{,\rho} \geqslant 0, \quad \Psi_{,\rho} \leqslant 0 \qquad \text{(III.12)}$$

и введем функции

$$D(w) = \int_0^w \Phi(w, \rho)\, dw, \quad R(h) = \int_0^h \Psi(h, \rho)\, dh, \qquad \text{(III.13)}$$

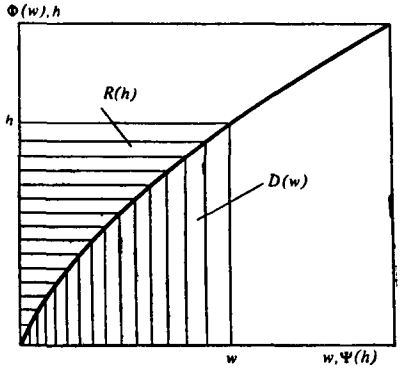
называемые далее потенциалом диссипации и дополнительным потенциалом диссипации. На рис. 21 им соответствуют заштрихованные площади под кривой $\Phi(w)$ и слева от нее. Если ввести полные потенциалы для области V соотношениями

$$D^*[w] = \int_V D(w, \rho)\, dV,$$

$$R^*[h] = \int_V R(h, \rho)\, dV, \qquad \text{(III.14)}$$

то для них будут справедливы все утверждения, приведенные в § 2, гл. II. Используя это обстоятельство, удается показать единственность поля скоростей и (при отсутствии предельного градиента давления) поля напоров в задачах с обычными краевыми

РИС. 21. К определению потенциала диссипации и дополнительного потенциала диссипации



условиями и доказать принцип максимума в несколько измененной форме: напор принимает свои максимальное и минимальное значения на границе области течения. Здесь под областью течения понимается та часть V_+ рассматриваемой области V, в которой $w>0$, включая границу (т. е. замыкание $\overline{V_+}$ области V_+). Если предельный градиент давления отсутствует, то $\overline{V}_+=V$, и это соответствует обычной формулировке принципа максимума, при предельном градиенте, не равном нулю, различие формулировок существенно (см. пример, с. 148).

Наибольший интерес, как и в линейном случае, представляют оценки для расхода фильтрационного потока через обобщенную трубку тока. Пусть H_0 — заданный перепад напора на трубке тока, Q — отвечающий ей расход. Функции

$$Q = S(H_0),\ H_0 = Z(Q) \tag{III.15}$$

назовем расходными характеристиками трубки тока. На решениях задачи функционалы D^* и R^* превращаются в функции одного аргумента, в качестве которого мы будем брать, соответственно, Q и H_0. Имеем следующие основные формулы:

$$\frac{dD^*[w]}{dQ} = H_0,\quad \frac{dR^*[H]}{dH_0} = Q, \tag{III.16}$$

$$D^*(Q) + R^*(H_0) = QH_0. \tag{III.17}$$

Назовем

$$\overline{Q} = H_0^{-1}R^*(H_0);\ \overline{H}_0 = Q^{-1}D^*(Q) \tag{III.18}$$

сглаженным расходом и сглаженным напором соответственно.

Из сказанного следует, что для сглаженного напора при фиксированном расходе и для сглаженного расхода при фиксированном напоре справедливы все утверждения § 2, гл. II. Для степенного закона фильтрации удается получить оценки непосредственно для расхода и перепада давления.

Действительно, в этом случае

$$\Phi(w,\ \rho) = \rho w^s,\ \Psi(h,\ \rho) = (h/\rho)^{1/s},$$

$$D[w] = \frac{\rho}{1+s}w^{s+1},\ R[h] = \frac{s\rho}{s+1}(h/\rho)^{\frac{s+1}{s}}. \tag{III.19}$$

Тогда, если $\boldsymbol{w}$ и H — решение, то с учетом (III.16) имеем

$$sD(w) = R(h);\ D^*[w] = s^{-1}R^*[H] = (1+s)^{-1}QH_0, \tag{III.20}$$

откуда

$$Q = (s+1)s^{-1}\overline{Q};\ H_0 = (s+1)\overline{H}_0. \tag{III.21}$$

Таким образом, поскольку при степенном законе фильтрации расход и напор пропорциональны соответственно сглаженным расходу и напору, для них верны все утверждения § 2, гл. II.

Для произвольного закона фильтрации справедливы следующие утверждения [17].

А. Принцип вдавливания. При вдавливании внутрь области фильтрации входной поверхности расход и скорости фильтрации во всех точках выходной поверхности не уменьшаются (при фиксированном перепаде напора).

Для двумерного случая доказано двойственное утверждение: при вдавливании внутрь области непроницаемых границ трубки тока расход не увеличивается.

В. Если для данного закона фильтрации $\Phi(w, \rho)$, $\rho(x, y, z)$ справедливы неравенства

$$\rho_1 w^{s_1} = \Phi_1 < \Phi(w, \rho) \text{ или } \Phi(w, \rho) \leqslant \rho_2 w^{s_2} \qquad \text{(III.22)}$$

($\rho_i > 0$, $s_i > 0$ — постоянные), то для соответствующих расходов $Q_1 \geqslant Q \geqslant Q_2$.

С. Если

$$\Phi(w, \rho) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \rho_i w^{s_i}, \quad \lambda_i = \text{const}, \qquad \text{(III.23)}$$

то при фиксированном Q

$$H_0 \geqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i H_{0i}. \qquad \text{(III.24)}$$

Здесь H_{0i} — перепад напора при течении с расходом Q в области той же формы при степенном законе фильтрации вида $\Phi(w,\rho) = \rho_i w^{s_i}$.

D. Если

$$\Psi(h, \rho) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \rho_i^{-1} h_i^{1/s_i}, \quad \gamma_i \geqslant 0, \qquad \text{(III.25)}$$

то при фиксированном H_0

$$Q \geqslant \sum_{i=1}^{k} \gamma_i Q_i. \qquad \text{(III.26)}$$

Здесь Q_i — расход фильтрационного потока через данную область при том же перепаде напора H_0 для закона фильтрации вида $\Phi = \rho_i w^{s_i}$.

Ниже приведены примеры использования этих общих утверждений.

Плоская задача. Рассмотрим плоскую задачу теории фильтрации при нелинейном законе сопротивления в однородной и изотропной среде. Введем обычным образом функцию тока $\psi(x, y)$, после чего система уравнений, описывающих движение, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} &H_{,x} = -\Phi(w)\, u/w, \quad \psi_{,x} = -v, \\ &H_{,y} = -\Phi(w)\, v/w, \quad \psi_{,y} = u, \\ &u = w\cos\theta, \quad v = w\sin\theta. \end{aligned} \qquad \text{(III.27)}$$

Здесь w — модуль скорости фильтрации; θ — угол, составляемый ею с положительным направлением оси x. Система уравне-

ний плоской задачи (III.27) превращается в линейную если за неизвестные величины взять ψ и H, а за независимые переменные w и θ. Это линеаризующее преобразование годографа было с успехом использовано в газовой динамике С. А. Чаплыгиным. Возможность его применения в теории фильтрации следует из установленной С. А. Христиановичем [43] аналогии между уравнениями фильтрации при нелинейном законе сопротивления и газовой динамики.

После несложных выкладок получим

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\Phi^2}{w\Phi'(w)}\frac{\partial \psi}{\partial w}; \quad \frac{\partial H}{\partial w} = \frac{\Phi}{w^2}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \tag{III.28}$$

$$\begin{aligned} dx &= -\left(\frac{\cos\theta}{\Phi}dH + \frac{\sin\theta}{w}d\psi\right), \\ dy &= -\frac{\sin\theta}{\Phi}dH + \frac{\cos\theta}{w}d\psi. \end{aligned} \tag{III.29}$$

Соотношения (III.29) позволяют, найдя решение системы (III.28), определить x и y как функции w и θ. Тем самым установлена связь между координатами x и y и напором H и функцией тока ψ, выраженная через параметры w и θ.

Основная система уравнений (III.28) — однородная линейная система эллиптического типа, которую при желании можно свести к одному уравнению для напора или функции тока:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\Phi^2}{w\Phi'(w)}\frac{\partial \psi}{\partial w}\right) + \frac{\Phi}{w^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0, \tag{III.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{w^2}{\Phi}\frac{\partial H}{\partial w}\right) + \frac{w\Phi'(w)}{\Phi^2(w)}\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = 0. \tag{III.31}$$

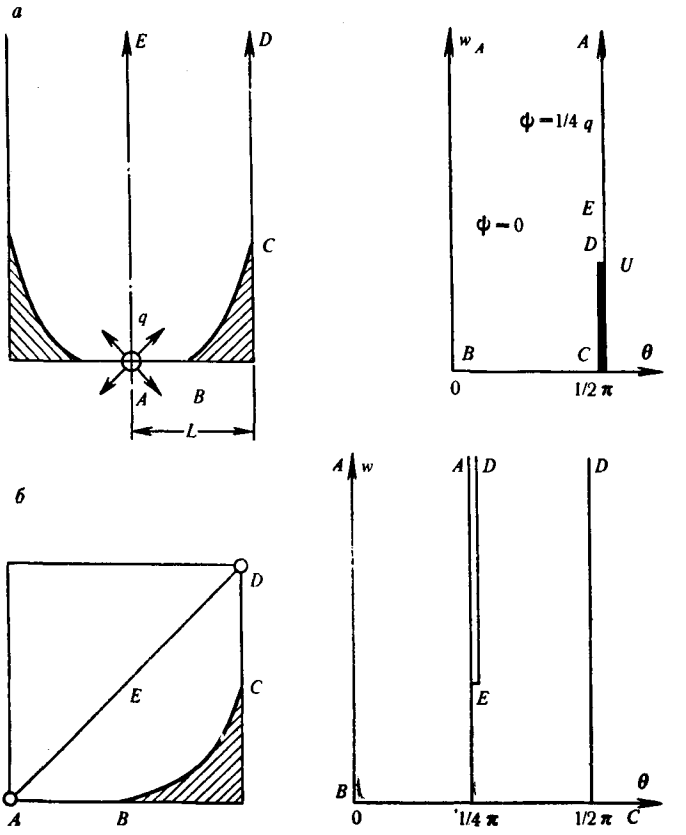
Эффективность решения конкретной задачи зависит от того, какая именно краевая задача для уравнений (III.30) — (III.31) должна быть решена на плоскости годографа (w, θ). Характер этой краевой задачи определяется, в основном, геометрией области движения в физической плоскости (x, y). В тех случаях, когда область движения — многоугольник, стороны которого либо непроницаемые границы, либо линии постоянного напора, на всех них направление скорости фильтрации постоянно на каждом участке и задано заранее (соответственно, вдоль границы или перпендикулярно к ней), так что граница области в плоскости годографа состоит из отрезков линий $\theta = \text{const}$. Если в области движения имеются источники или стоки, то в плоскости (w, θ) им отвечает бесконечно удаленная точка $w \to \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. При отличном от нуля предельном градиенте давления в области фильтрации могут образоваться зоны, в которых скорость фильтрации равна нулю («застойные зоны») и область течения оказывается областью с неизвестной границей (рис. 22). Поскольку на границе застойной зоны скорость фильтрации w обращается в нуль, этой неизвестной границе в плоскости годографа соответствует отрезок линии $w = 0$

(под углом θ при этом естественно понимать направление не обращающегося в нуль вектора градиента напора ∇H; оно совпадает с направлением касательной к границе застойной зоны). Таким образом, в задачах фильтрации с предельным градиентом преобразование годографа не только позволяет преобразовать нелинейную задачу в линейную, но и область с неизвестной границей застойной зоны переводит в известную область плоскости годографа.

Во всех случаях показанная на рис. 22 область в плоскости годографа отвечает элементу симметрии области течения; соответствие точек показано буквами, а граничные условия задачи в плоскости годографа указаны на рисунках. Заметим, что при анализе течений с предельным градиентом удобно считать, в отличие от общепринятого, w и θ декартовыми (а не полярными) координатами в плоскости годографа. Вызвано это тем, что асимптотика решения вблизи линии $w=0$ нетривиальным образом свя-

РИС. 22. Примеры отображения области течения на плоскость годографа. Расстановка скважин:

а — рядная цепочка скважин; *б* — площадная (элемент пятиточечной системы площадного заводнения)



зана со структурой течения и ее можно задавать по-разному.

После сведения задачи при помощи преобразования годографа к линейной эллиптической задаче в известной области решение ее оказывается делом математической техники, хотя порой и достаточно сложной. Отсылая интересующихся этой, сейчас уже достаточно разработанной, стороной дела к книге [9], рассмотрим некоторые простые решения.

Как обычно в гидродинамике, для качественного анализа принципиальное значение имеет исследование асимптотики решения вблизи особых точек потока. Такими точками являются, прежде всего, окрестности источников и стоков (скважин), где скорость потока обращается в бесконечность, окрестность бесконечно удаленной точки, в которой скорость стремится к нулю, окрестность критической точки потока (при фильтрации с предельным градиентом давления — застойной зоны), где скорость потока обращается в нуль, и окрестность угловых точек границы потока.

Рассмотрим течение вблизи скважины. Окружим ее линией Γ_Q, на которой модуль скорости имеет некоторое постоянное значение $w = Q$ и которая целиком расположена внутри области движения. На плоскости годографа области внутри этой линии отвечает полуполоса Π_Q:

$$Q \leqslant w < \infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{III.32}$$

в которой искомое решение задачи для функции тока $\psi(w, \theta)$ удовлетворяет уравнению (III.30) с условиями

$$\psi(0) = 0, \ \psi(2\pi) = q, \ \psi(Q, \theta) = f(\theta), \ f(0) = 0, \ f(2\pi) = q, \tag{III.33}$$
$$\psi(\infty, 0) \leqslant M < \infty.$$

Здесь q — интенсивность источника; $f(\theta)$ — неопределенная функция, характеризующая распределение потока вдоль линии Γ_Q. Последнее условие означает, что функция тока вблизи особой точки ограничена и мы имеем дело именно с источником (а не с комбинацией источника и диполя).

Если считать функцию $f(\theta)$ известной, решение в области Π_Q легко получить методом Фурье, поскольку независимо от вида закона фильтрации уравнение (III.31) не содержит в явном виде угловой переменной θ. Нетрудно убедиться обычными методами, что в данном случае имеем

$$\psi(w, \theta) = \frac{q\theta}{2\Pi} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n/2}(w) \sin\frac{n\theta}{2}, \ w > Q, \tag{III.34}$$

где $P_{n/2}(w)$ — убывающее на бесконечности решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения

$$\left[\frac{\Phi^2}{w\Phi'(w)} P'\right]' - l^2 \frac{\Phi}{w^2} P = 0, \ l = \frac{1}{2} n. \tag{III.35}$$

Рассмотрим широкий класс законов фильтрации со степенной асимптотикой в области больших скоростей

$$\Phi(w) \sim \Phi_\infty w^s \quad (w \to \infty), \ s > 0. \tag{III.36}$$

Тогда при $w \to \infty$ уравнение (III.35) асимптотически переходит в

$$[s^{-1}w^s P']' - 4^{-1}n^2 w^{s-2} P = 0, \qquad \text{(III.37)}$$

линейно независимые решения которого — степенные функции

$$P_{1,2} = w^{r_{1,2}}, \quad r_{1,2} = 2^{-1}\left[1 - s \pm \sqrt{sn^2 + (1-s)^2}\right]. \qquad \text{(III.38)}$$

Очевидно, показатели $r_{1,2}$ вещественны и имеют различные знаки. Таким образом, одно из линейно независимых решений уравнения (III.37) можно выбрать убывающим на бесконечности, причем другое оказывается неограниченно возрастающим. Из сказанного легко заключить (и это можно доказать строго), что условием ограниченности на бесконечности выделяется единственное с точностью до множителя решение уравнения (III.35), которое при $w \to \infty$ убывает как

$$w^{r_2}, \quad r_2 = 2^{-1}\{(1-s) - [(1-s)^2 + sn^2]^{1/2}\}. \qquad \text{(III.39)}$$

В частности, при линейном возрастании $\Phi(w)$ в области больших скоростей $s = 1$, $r_2 = -1/2n$, а $P_{n/2}(w)$ убывает с ростом w как $w^{-1/2n}$.

Таким образом, при $w \to \infty$

$$\psi(w, \theta) = \frac{q\theta}{2\pi} + O(w^{r_2}). \qquad \text{(III.40)}$$

Тогда из (III.28) и (III.29) имеем

$$H = H(w) = \frac{q}{2\pi}\int \frac{\Phi}{w^2} dw, \quad x + iy = re^{i\theta},$$

$$dr = -\Phi^{-1} dH, \quad r = -\frac{q}{2\pi}\int \frac{dw}{w^2} = \frac{q}{2\pi w}. \qquad \text{(III.41)}$$

Очевидно, формулы (III.40) и (III.41) описывают плоско-радиальное фильтрационное течение вблизи источника. Течение обладает осевой симметрией; распределения скоростей фильтрации и функции тока не зависят от вида закона фильтрации, линии тока — радиусы, исходящие из источника; скорость убывает обратно пропорционально расстоянию от источника, линии постоянного напора — концентрические окружности с центром в источнике.

Тем самым показано, что при любом законе фильтрации $\Phi(w)$ и любой геометрии пласта течение в промежуточно-асимптотической области $\rho \ll r \ll R$, где ρ — радиус скважины; R — внешний масштаб пластовой системы (например, расстояние между скважинами или расстояние от скважины до границы пласта) — простейшее плоско-радиальное течение. Используя (III.41), легко находим формулу, связывающую расход фильтрационного потока с перепадом напора $H_1 - H_2$ между двумя концентрическими линиями постоянного напора:

$$H_1 - H_2 = \frac{q}{2\pi}\int_{w_2}^{w_1} \frac{\Phi(w)}{w^2} dw; \quad w_{1,2} = \frac{q}{2\pi r_{1,2}}. \qquad \text{(III.42)}$$

В частности, при фильтрации с предельным градиентом $\Phi(w) = w + \lambda$ и степенном законе фильтрации $\Phi(w) = w^s$ имеем, соответственно,

$$H_1 - H_2 = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + \lambda (r_2 - r_1); \tag{III.43}$$

$$H_1 - H_2 = \left(\frac{q}{2\pi}\right)^s \frac{1}{s-1} \left(r_1^{1-s} - r_2^{1-s}\right). \tag{III.44}$$

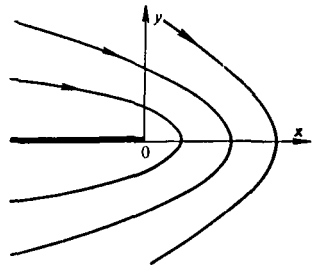


РИС. 23. Обтекание фильтрационным потоком непроницаемой полупрямой

Если $r_1 \ll r_2$, последнюю формулу можно упростить, положив

$$H_1 - H_2 = \left(\frac{q}{2\pi r_1}\right)^s \frac{r_1}{s-1}, \quad s > 1; \quad H_1 - H_2 = \left(\frac{q}{2\pi r_2}\right)^s \frac{r_2}{1-s}, \quad s < 1. \tag{III.45}$$

Таким образом, при подсчете дебита плоского фильтрационного потока со степенным законом фильтрации можно рассматривать задачи с контуром питания, унесенным в бесконечность при $s>1$ или с нулевым радиусом источника (при $s<1$), что невозможно в случае линейного закона фильтрации и закона фильтрации с предельным градиентом.

Обратимся теперь к последующим членам разложения (III.34). Все они имеют однотипную структуру произведения

$$P_l(w) \sin l\theta, \tag{III.46}$$

убывающего на бесконечности решения уравнения (III.35) и гармонической функции угла.

Естественно поставить вопрос о том, какому течению соответствует такое произведение. Поскольку $\sin l\theta$ обращается в нуль при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/l = \theta_0$, часть оси $0x$ и прямой, составляющей с нею угол θ_0, образуют единую линию тока. Поэтому можно ожидать, что решение (III.46) соответствует внешнему обтеканию клина с углом при вершине $\alpha_0 = \pi - \theta_0$. Такая интерпретация справедлива при $l \gg 1$. Более детальный анализ подтверждает это допущение. Вблизи вершины клина скорость фильтрации обращается в бесконечность (это обычный формальный результат, связанный с предположением о бесконечной кривизне линий тока вблизи вершины угла). В частности, при $l=1$ получаем решение задачи об обтекании непроницаемой полупрямой, т. е. бесконечно тонкого клина (рис. 23). Соответствующее ему уравнение (III.35) принимает вид

$$\left(\frac{\Phi^2}{w\Phi'} P'\right)' - \frac{\Phi}{w^2} P = 0. \tag{III.47}$$

Легко убедиться непосредственной проверкой, что решением этого уравнения, удовлетворяющим условию убывания на бесконечности, является выражение

$$P_1^+(w) = 1/\Phi(w). \tag{III.48}$$

Используя (III.28) и (III.29), найдем, что решение задачи об обтекании фильтрационным потоком непроницаемой полупрямой дается выражениями

$$\psi = \frac{Q}{\Phi(w)} \sin\theta; \quad H = -\frac{Q}{w}\cos\theta, \tag{III.49}$$

$$x + iy = Q\left[\int_w^\infty \frac{du}{u^2\Phi(u)} - \frac{1}{2\Phi w}\left(e^{2i\theta} - 1\right)\right].$$

Решение (III.49) обладает рядом примечательных особенностей. Прежде всего заметим, что $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \to \infty$ при $w \to 0$ и фиксированном θ, так что течением охвачена вся плоскость независимо от вида закона фильтрации.

В то же время при наличии предельного градиента давления $\Phi(0) = \lambda > 0$ при $w \to 0$ функция тока $\psi(w, 0)$ ограничена значением Q/λ и, следовательно, расход фильтрационного потока конечен. Если же $\lambda = 0$, то, так же, как и в соответствующей задаче линейной фильтрации, расход потока бесконечен. Другая интересная особенность найденного решения обнаруживается, если рассматривать плоскость xOy как вертикальную и вычислить изменение величины y вдоль линий тока $\psi = \text{const}$. Согласно (III.29) и (III.49) имеем

$$dy + \frac{\sin\theta}{\Phi} dH = dy - \frac{\psi}{Q} dH = 0,$$

так что вдоль линий тока

$$y - (\psi/Q) H = \text{const}. \tag{III.50}$$

Если взять ту линию тока, на которой $\psi = Q$, то на ней будет постоянна величина $H - y$. Заметим теперь, что если плоскость xOy — вертикальная с осью Oy, направленной вверх, то разность $H - y$ будет пропорциональна гидростатическому давлению. Следовательно, найденное решение отвечает течению в вертикальной плоскости, для которого на одной из линий тока давление остается постоянным. Тогда, рассматривая лишь верхнюю полуплоскость $y > 0$, можно взять эту линию тока за свободную поверхность и получить точное решение задачи безнапорной фильтрации при нелинейном законе сопротивления. Это решение, найденное Энгелундом, является обобщением классического решения Н. Е. Жуковского о безнапорном притоке к дренажной щели, расположенной на водоупоре.

Рассмотрим асимптотику решений в области малых скоростей. Если в области фильтрации имеется точка (критическая точка) или застойная зона, в которой скорость фильтрации обращается в нуль, то эту критическую точку можно окружить замкнутой линией Γ_ω, на которой модуль скорости фильтрации принимает постоянное значение ω и внутри которой нет других особых точек потока. Область D_ω между линией Γ_ω и критической точкой (застойной зоной) на плоскости годографа отображается в полосу

$\Delta_\omega: 0 < w < \omega$, причем удобно считать ее бесконечной по $\theta: -\infty < \theta < \infty$, поскольку при каждом обходе вокруг критической точки угол θ получает приращение $2\pi N$. Целое число N назовем кратностью критической точки (застойной зоны). На границе застойной зоны (в критической точке) функция тока принимает постоянное значение, которое можно принять за нуль. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы в полосе Δ_ω найти решение уравнения (III.30), обращающееся в нуль при $w = 0$, и периодическое по θ с периодом $2\pi N$. Это решение имеет вид

$$\psi(w, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n/N}^{-}(w)\left[A_n \sin\frac{n\theta}{N} + B_n \cos\frac{n\theta}{N}\right]. \qquad \text{(III.51)}$$

Здесь $P_l^-(w)$, обращающееся в нуль при $w=0$, — решение уравнения (III.35) с $l = n/N$; A_n и B_n — постоянные.

Соответствующие формулы для напора и координат имеют вид

$$H = \frac{\Phi^2}{w\Phi'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N}{n} P_{n/N}^{-1}(w)\left[A_n \cos\frac{n\theta}{N} - B_n \sin\frac{n\theta}{N}\right] + \text{const}, \qquad \text{(III.52)}$$

$$dz = e^{i\theta}[-\Phi^{-1}dH + iw^{-1}d\psi).$$

Из выражений (III.52) следует, что вид прообраза линии $w = 0$, $-\infty < \theta < \infty$ на физической плоскости вполне определяется асимптотикой решений $P_l^-(w)$ при $w \to 0$.

Действительно, на границе застойной зоны имеем

$$dz = dx + idy = e^{i\theta}\frac{dH}{\Phi} = -e^{i\theta}\lim_{w\to 0}\left(\frac{\Phi}{w\Phi'(w)}\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)dw =$$

$$= -e^{i\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{w\to 0}\left(\frac{\Phi(w)}{w\Phi'(w)}\frac{dP_{n/N}^{-}w}{dw}\right)\left(A_n \sin\frac{n\theta}{N} + B_n \cos\frac{n\theta}{N}\right)d\theta. \qquad \text{(III.53)}$$

Из анализа решений $P_l^-(w)$ несложно установить, что при $l>1$ существует конечный предел

$$\chi_l = \lim_{w\to 0}\left[\frac{\Phi}{w\Phi'(w)}\frac{dP_l^-(w)}{dw}\right] \qquad \text{(III.54)}$$

для любого вида закона фильтрации. При этом $\chi_l = 0$, если $\Phi(0) = 0$ и $\chi_l \neq 0$, если $\Phi(0) = \lambda \neq 0$, а если $l < 1$, конечный предел существует при фильтрации с предельным градиентом, для степенного же (или асимптотически степенного) закона фильтрации указанный предел равен бесконечности. Таким образом, можно сделать важный вывод о том, что в отсутствие предельного градиента давления в потоке могут существовать лишь изолированные критические точки, находящиеся в конечной части плоскости, если все $\chi_l = 0 (l > 1)$, или в бесконечно удаленной точке, если найдется такое n, для которого $l = n/N = 1$. Иными словами, топологическая структура фильтрационного потока при отсутствии предельного градиента остается такой же, как и при линейном законе фильтрации.

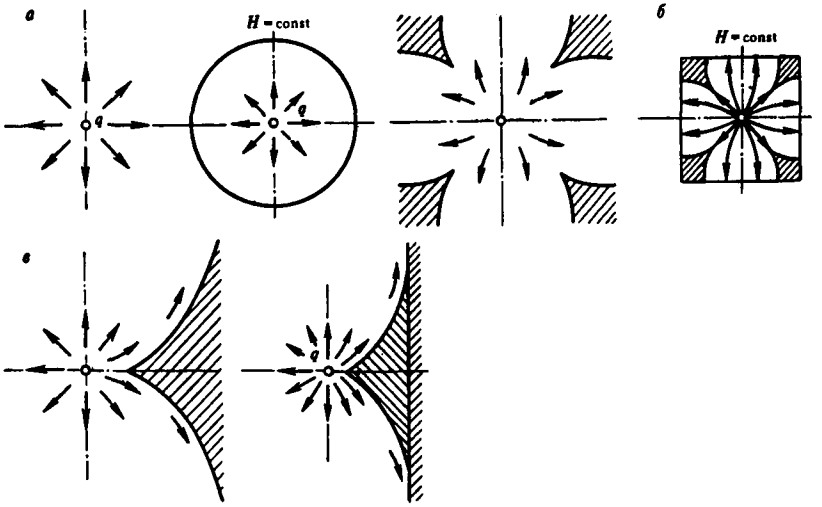


РИС. 24. Возможные структуры течения с предельным градиентом в неограниченной области

Если же имеет место фильтрация с предельным градиентом ($\Phi(0)=\lambda>0$), то не существует изолированных критических точек потока; вместо них образуются области неподвижной жидкости (застойные зоны), остающиеся в конечной части плоскости или уходящие в бесконечность.

Особенно сложной оказывается структура потока при фильтрации с предельным градиентом в окрестности бесконечно удаленной точки. Если предельного градиента нет, то из требования ограниченности функции тока на бесконечности следует, что либо там расположена критическая точка, либо сток (источник) и линии тока стремятся к радиально расходящимся лучам ($\theta=\text{const}$).

При фильтрации с предельным градиентом можно получить сколько угодно решений с ограниченной на бесконечности функцией тока; они отличаются расположением уходящих на бесконечность застойных зон. Такая неединственность решений задач фильтрации с предельным градиентом в неограниченных областях не указывает на их дефектность, а отражает специфическое свойство «дальнодействия»: если мы вносим в поток препятствие, а затем «уносим» его в бесконечность, то «память» об этом препятствии не исчезает полностью, как при линейной фильтрации, а остается в виде уходящей на бесконечность застойной зоны. Так, на рис. 24 показаны три различные структуры течения, создаваемого уединенным источником в бесконечной плоскости, получаемые предельным переходом из трех различных течений — осесимметричного притока к центральной скважине в круговом пласте (*а*), притока к центральной скважине в пласте, имеющем в плане форму квадрата (*б*), а также притока к скважине вблизи непроницаемой прямолинейной границы (*в*). Предельный переход к

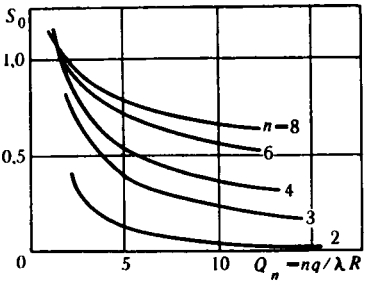


РИС. 25. Зависимость относительной площади застойных зон от относительной интенсивности потока

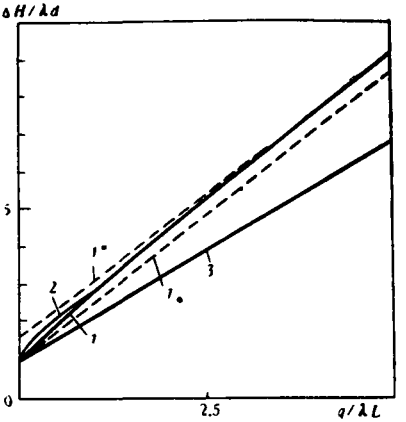


РИС. 26. Индикаторные кривые скважин при фильтрации с предельным градиентом:

1 — для элемента пятиточечной сетки скважин с диагональю d; $\ln(d/2\rho) = 7$; *2* — для скважины на расстоянии d от прямолинейного контура питания, $\ln(d/\pi\rho) = 6$; *3* — для скважины в круговом пласте радиуса R, $\ln R/\rho = 7$, 1_* — оценка снизу, 1^* — оценка сверху

течению в неограниченном пласте осуществляется увеличением линейного размера L до бесконечности.

Предельное равновесие. Особенность, принципиально отличающая фильтрацию с предельным градиентом, заключается в отсутствии движения жидкости при непостоянстве распределения давления по пласту, если только градиент давления не превосходит по модулю предельное значение G. В том случае, когда в каждой точке пласта $|\nabla p| = G$, распределение давления называется предельно равновесным. Слово «предельный» означает, что даже малое изменение давления может привести к началу движения. Если на некоторой линии (в пространственном случае — поверхности) C, ограничивающей область D, задано давление, то найти предельно равновесное распределение давления в D можно, решая уравнение

$$|\triangle p| = G, \quad M \in D, \tag{III.55}$$

при граничных условиях $p = f(x, y, z)$, $M \in \partial D = C$. Это уравнение имеет многочисленные аналоги в других областях физики. Например, уравнение эйконала в геометрической оптике, имеющее вид (III.55), если поверхности постоянного давления считать волновыми поверхностями. Нормали к этим поверхностям — линии направления градиента давления — оказываются при этом прямыми, а семейство поверхностей постоянного давления — семейством поверхностей, находящихся друг от друга на фиксированном расстоянии (эквидистантных).

Рассматриваемая задача в двумерном варианте имеет и другой весьма наглядный аналог. Если функция $p\ (x, y)$ — решение этой задачи, то она в некотором масштабе описывает форму поверхности сыпучей среды («песка»), если на контуре C задана

толщина слоя песка. Нетрудно сообразить, что предельно равновесные распределения давления могут не удовлетворять принципу максимума, если не сделать оговорок (см. п. 1).

Пусть на плоскости заданы эксцентричные окружность радиуса R и расположенная внутри нее окружность радиуса ρ («контур питания» и «скважина»), на которых заданы давления P_1 и P_2 соответственно. Построим на каждой из них конические поверхности «воронкой» вверх и вниз с наклоном образующих G

$$p_1^{\pm} = P_1 \pm G\left[R^2 - (x^2 + y^2)\right]^{1/2},$$

$$p_2^{\mp} = P_2 \pm G\left[(x - \delta)^2 + y^2 - \rho^2\right]^{1/2} \qquad \text{(III.56)}$$

и положим

$$p^+(x, y) = \max\left(p_1^{\pm}, p_2^{\pm}\right),$$

$$p^-(x, y) = \min\left(p_1^{\pm}, p_2^{\pm}\right). \qquad \text{(III.57)}$$

Нетрудно понять, что функциям p^+ и p^- соответствуют два предельно равновесных решения задачи (III.55) — верхнее и нижнее.

Это показывает, что предельно равновесные состояния определены не единственным образом; существенно уметь находить именно те предельно равновесные или просто равновесные состояния, которые реально достижимы в ходе некоторого нестационарного процесса.

Приведем некоторые результаты расчета основных элементов течения при фильтрации с предельным градиентом.

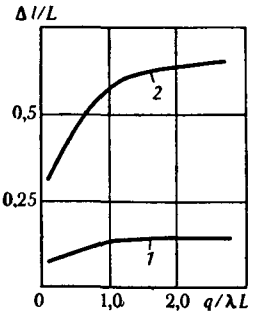
На рис. 25 показана зависимость относительной площади застойных зон, образующихся внутри кольцевой батареи n равнодебитных скважин, от относительной интенсивности потока, а на рис. 26 — индикаторные кривые скважины в центре кругового контура питания радиуса R.

Во всех случаях расчеты проведены для относительного радиуса скважины $\rho/R = 10^{-3}$.

Влияние предельного градиента давления сказывается не только в образовании застойных зон, но и в общем усилении неравномерности потока, проявляющемся в концентрации основного потока внутри относительно узкой струи. Количественно эту особенность иллюстрирует рис. 27.

Основные проявления «псевдопластической» нелинейности типа фильтрации с предельным градиентом давления — увеличение перепадов давления и усиление присущей потоку неравномерности, вплоть до образования застойных зон. Эффекты эти становятся особенно значительными, когда мала интенсив-

РИС. 27. Зависимость ширины трубки тока от интенсивности потока $q/\lambda L$ при фильтрации с предельным градиентом. Расход через квадратный элемент пятиточечной сетки в %:
1 — 20; 2 — 80



ность потока ($q/\lambda L<1$). Как показано ниже, эти основные закономерности сохраняются и для более сложных течений, в том числе и в задачах вытеснения нефти водой.

Задача 1. Используя соотношения (III.23) — (III.24), показать, что для обобщенной трубки тока любой формы перепад давления при фильтрации с предельным градиентом удовлетворяет неравенству

$$\Delta p \geqslant \Delta p_D + L_* G = \Delta p_D + \Delta p_0, \tag{III.58}$$

где Δp_D — перепад давления, рассчитанный при $G = 0$; L_* — минимальное расстояние между «входом» и «выходом» трубки тока; Δp_0 — пороговый перепад давления, при котором начинается движение.

Задача 2. Построить отображение на плоскость годографа скорости фильтрации элемента симметрии течения, создаваемого кольцевой батареей n равнодебитных стоков интенсивности q и центрального источника интенсивности $Q = nq$. Как при такой геометрии течения будет располагаться застойная зона в случае фильтрации с предельным градиентом?

Задача 3. Показать, что для уравнения закона фильтрации вида

$$\Phi(w) = (w^2 + \lambda^2)^{1/2} \tag{III.59}$$

функция $\psi(w, \theta)$ может быть выражена через гармоническую вспомогательную функцию. (Этот результат впервые получен С. В. Панько.)

Задача 4. Показать, что при произвольном законе фильтрации уравнение (III.30) допускает частное решение вида

$$\psi(w, \theta) = P_1^-(w) \sin\theta, \quad P_1^-(w) = [\Phi(w)]^{-1} \int_0^w v\Phi'(v)\, dv. \tag{III.60}$$

Указать гидродинамический смысл полученного решения; проанализировать его структуру для степенного закона фильтрации и для фильтрации с предельным градиентом.

Задача 5. Показать, что при нелинейной безнапорной фильтрации образом свободной поверхности на плоскости годографа служит кривая [43]

$$-\Phi(w) + C \sin\theta = 0, \quad C = k\rho g/\mu. \tag{III.61}$$

Задача 6. Используя формулу (III.42), получить связь между дебитом и перепадом давления для притока к скважине при двучленном законе фильтрации — см. формулу (I.13).

§ 3. Нестационарные задачи фильтрации неньютоновских жидкостей

Нестационарные процессы в пластовой системе при фильтрации неньютоновских жидкостей обладают определенными особенностями, позволяющими в некоторых случаях обнаружить нарушения закона Дарси, оценить их количественно и дать прогноз их возможного влияния на показатели разработки нефтяного месторождения. Поэтому наблюдение нестационарных процессов — важный источник информации о свойствах пластовой системы.

Основные уравнения. Пусть $P(x, y, z)$ — распределение давления, отвечающее некоторому стационарному фильтрационному движению, а $p(x, y, z, t)$ — распределение давления в нестационарном процессе, начинающемся в момент $t = 0$, причем

$$p(x, y, z, 0) = P. \tag{III.62}$$

Разность

$$\tilde{p} = p - P \tag{III.63}$$

назовем возмущением давления или отклонением от стационарного состояния.

Комбинируя уравнения неразрывности слабосжимаемой жидкости

$$mK^{-1}p_{,t} + \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \tag{III.64}$$

и закона фильтрации, которое запишем в виде

$$\operatorname{grad} p = -\Pi\Phi(u/\lambda)\,\boldsymbol{u}/u, \quad \boldsymbol{u} = -\lambda\psi(|\nabla p|/\Pi)\,\nabla p/|\nabla p| \tag{III.65}$$

(Π — характерное значение градиента давления; λ — характерное значение скорости фильтрации), получаем систему уравнений фильтрации неньютоновской жидкости при упругом режиме, которую можно привести к одному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\lambda K}{m}\nabla\left[\psi\left(\frac{|\nabla p|}{\Pi}\right)\frac{\nabla p}{|\nabla p|}\right]. \tag{III.66}$$

Стационарное распределение, для которого $p_{,t} = 0$, также удовлетворяет уравнению (III.66) или системе (III.64) — (III.65).

Однако p, будучи разностью двух решений уравнения (III.66), вообще говоря, из-за нелинейности функций Φ и Ψ, не является решением. Таким образом, при нелинейной фильтрации не справедлив принцип суперпозиции решений, и характер возмущений зависит, вообще говоря, не только от свойств пластовой системы и инициирующих возмущение внешних воздействий (например, пуск скважины), но и от начального состояния. Далее в тех случаях, когда особо не оговорено противное, будем считать начальное состояние отвечающим первоначально невозмущенному пласту ($P = P_0 = \text{const}$), причем в силу того, что в уравнения (III.64) — (III.66) давление входит только под знаком производных, можно положить $P_0 = 0$, $\tilde{p} = p$.

Бегущая волна. При распространении возмущения с той или иной степенью строгости выделяется фронт возмущения, отделяющий невозмущенную область от области возмущения.

Выберем вблизи фронта возмущения некоторую малую область, движущуюся со скоростью фронта. В силу малости области распределение давления в ней можно в любой момент считать стационарным [1].

Будем искать поэтому решение уравнений (III.64) — (III.65), соответствующее бегущей (равномерно распространяющейся в направлении оси Ox) волне:

$$p = p(x - Vt), \quad u = u(\xi), \quad \xi = x - Vt. \tag{III.67}$$

[1] Читатель, знакомый с методом сращиваемых асимптотических разложений, легко заметит, что речь идет, по существу, о построении внутреннего решения задачи, отвечающего структуре фронта. Нетрудно проделать соответствующие формальные рассуждения.

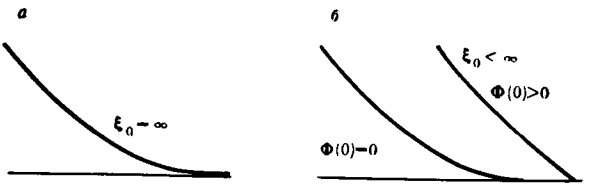


РИС. 28. Распределение давления вблизи фронта возмущения при нелинейной фильтрации.

Волны: *а* — с бесконечной скоростью распространения; *б* — с конечной скоростью распространения

Подставляя выражения (III.67) в систему (III.64) — (III.65), получим

$$-\frac{mV}{K}\frac{dp}{d\xi} + \frac{du}{d\xi} = 0, \quad \frac{dp}{d\xi} = -\Pi\Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right), \tag{III.68}$$

откуда

$$dU/d\xi = -\nu\Phi(U), \quad U = u/\lambda, \quad \nu = mV\Pi/\lambda K,$$

$$\xi = -\sigma(U)/\nu, \quad p = \Pi U/\nu + p_\infty, \quad \sigma(U) = \int[\Phi(U)]^{-1}dU. \tag{III.69}$$

Из очевидных условий на бесконечности $p = u = 0$, $\xi \to \infty$ получаем $p_\infty = 0$. Дальнейшие выводы существенно зависят от характера закона фильтрации. Если $\Phi(U)$ при $U \to 0$ остается конечным либо стремится к нулю достаточно медленно (например, как U^s, $s < 1$), то интеграл в (III.69) сходится на нижнем пределе и, следовательно, существует граница $\xi = \xi_0$, на которой и правее ее $p \equiv u \equiv 0$, т. е. волна распространяется с конечной скоростью. В силу произвола в выборе начала отсчета ξ будем полагать $\xi_0 = 0$. Вблизи фронта волны $\xi = \xi_0$ производная $d\xi/dU$ обращается в бесконечность, если $\Phi(0) = 0$ (предельный градиент давления отсутствует), и конечна при фильтрации с предельным градиентом. Таким образом, на переднем фронте волны давление и скорость фильтрации обращаются в нуль плавно, если предельного градиента нет; при наличии предельного градиента на фронте волны распределение давления имеет угловую точку (рис. 28).

Устремим теперь U к бесконечности. При этом, если $\sigma(\infty) = \infty$, то $\xi \to -\infty$; если же $\sigma(\infty) < \infty$ (так будет, например, при $\Phi(U) \sim U^\zeta$, $\zeta > 1$), то давление и скорость фильтрации в равномерно движущейся волне обращаются в бесконечность в конечной точке. Выбрав точку, совпадающую в начальный момент с фронтом волны, за входное сечение ($x = 0$) пласта и полагая в полученных соотношениях $\xi = -Vt$, найдем, по какому закону нужно менять во времени давление в этом сечении для того, чтобы волна в пласте двигалась равномерно. Обращение этого давления в бесконечность за конечное время означает, что добиться равномерного движения волны давления в течение более длительного времени невозможно; она должна начать замедляться.

В рассмотренном решении наиболее существенным моментом является характер изменения давления и скорости фильтрации вблизи фронта волны. Скорость распространения возмущений конечна, если интеграл (III.69) сходится на нижнем пределе (в частности, при законе фильтрации с предельным градиентом), и

распределение давления имеет на фронте угловую точку, $\Phi(0)\neq 0$, причем при приближении к границе из области движения градиент давления стремится к предельному. Эти существенно для правильного понимания качественных особенностей решения и для их приближенного построения выводы подтверждаются анализом известных решений более сложных задач. В некоторых случаях такие выводы можно строго обосновать.

Течение вблизи скважины. При исследовании пластов наибольший интерес представляют течения вблизи возмущающей скважины. Считая начальное состояние пласта невозмущенным, имеем одномерное плоско-радиальное течение, определяем соотношениями

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{K\lambda}{m}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\Psi\left(\frac{1}{\Pi}\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right];$$

$$p(r,\ 0) = 0;\quad \lim_{r\to 0}\left[2\pi rh\lambda\Psi\left(\Pi^{-1}p_{,r}\right)\right] = Q(t) \text{ или } p(\rho,\ t) = p_w \qquad \text{(III.70)}$$

(при условиях задания на скважине дебита или давления соответственно). Указанная задача автомодельна в следующих случаях. 1) при степенном законе фильтрации; 2) при произвольном законе фильтрации, если дебит изменяется по закону $Q=At^{1/2}$ (см. далее задачу 1). Поскольку этим условиям не удовлетворяют практически важные задачи, их приходится исследовать либо приближенно методом интегральных соотношений (см. гл. II), либо численно.

Для отыскания приближенного решения задачи (III.70) примем распределение скоростей фильтрации в виде

$$u(r,\ t) = -\frac{Q(t)}{2\pi rh}\left[1 - \frac{r}{l(t)}\right],\quad r \leqslant l, \qquad \text{(III.71)}$$

где $l(t)$ — граница зоны возмущения. Выберем $l(t)$ таким образом, чтобы в каждый момент удовлетворялось следующее из (III.70) первое интегральное соотношение: соотношение материального баланса

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{2\pi rmh}{K}\,p(r,\ t)\,dr = -Q(t). \qquad \text{(III.72)}$$

Здесь с учетом условия $p(l,\ t) = 0$ вместо $p(r,\ t)$ следует подставить выражение

$$p(r,\ t) = -\int_r^{l(t)} \Pi\Phi\left(\frac{|u(r,\ t)|}{\lambda}\right)dr, \qquad \text{(III.73)}$$

где $u(r,\ t)$ дается соотношением (III.71). Выражение (III.71) для скорости фильтрации правильно отражает особенности распределения ее вблизи скважины и на границе зоны возмущения. Поэтому можно получить при таком приближенном решении достаточную точность.

В частности, для закона фильтрации с предельным градиентом при $Q = \text{const}$ получим ($\Pi = G$, $\lambda = kG/\mu$, $\Phi(U) = U+1$):

$$p(r, t) = \frac{\mu Q}{2\pi kh}\left[\ln\frac{r}{l} + \left(1 - \frac{2\pi khlG}{\mu Q}\right)\left(1 - \frac{r}{l}\right)\right], \quad r \leqslant l,$$

$$l^2 + 2l^3/l^* = 12\varkappa t, \quad l^* = \mu Q\,(2\pi khG)^{-1}, \quad \varkappa = kK/m\mu,$$

$$p_w = p(\rho, t) \simeq \frac{\mu Q}{2\pi kh}\left(\ln\frac{\rho}{l} + 1 - \frac{2\pi khGl}{\mu Q}\right), \quad \rho \ll l. \qquad \text{(III.74)}$$

На рассматриваемом примере отчетливо видна роль, которую играет дополнительный размерный параметр — предельный градиент давления G. В комбинации с дебитом на единицу мощности пласта с помощью этого параметра получаются характерный линейный размер l^* и характерное время $t^* = l^{*2}/\varkappa$.

Решение задачи оказывается качественно различным при $t/t_* \ll 1$ и $t/t_* \gg 1$. При малых временах имеем $l \ll l_*$. Пренебрегая в (III.75) членами порядка l/l_*, можно убедиться, что формально это эквивалентно предположению $G = 0$, т. е. при малых временах решение задачи фильтрации с предельным градиентом оказывается подобным решению линейной задачи:

$$p_w = -\frac{\mu Q}{4\pi kh}\ln\frac{12\varkappa t}{\rho^2}; \quad l = (12\varkappa t)^{1/2} \ll l_*. \qquad \text{(III.75)}$$

Причина такого совпадения решений линейной и нелинейной задач состоит в том, что при малых временах изменение давления происходит в узкой зоне, где градиенты давления весьма велики; при таких обстоятельствах поправка, вносимая предельным градиентом, пренебрежимо мала. Со временем область движения расширяется, и все большую долю ее составляет область малых градиентов (напомним, что скорость фильтрации на расстоянии r от скважины, очевидно, не превосходит $Q/(2\pi rh)$. Поэтому все более существенным оказывается вид закона фильтрации при малых скоростях. Если $t \gg t^*$, имеем

$$l \simeq \left(\frac{3\varkappa t\mu Q}{\pi khG}\right)^{1/3} \gg l_*,$$

$$p_w \simeq -G\left(\frac{3\varkappa t\mu Q}{\pi khG}\right)^{1/3} + \frac{\mu Q}{6\pi kh}\ln\frac{\pi khG\rho^3}{3\mu\varkappa Qt} + \frac{3\mu Q}{4\pi kh}. \qquad \text{(III.76)}$$

Таким образом, для значительных времен закон изменения давления в скважине оказывается уже не логарифмическим, а степенным. График $p_w(\ln t)$ показан на рис. 29, распределение давления в функции от расстояния от скважины имеет логарифмическую асимптотику вблизи скважины, а на границе зоны возмущения градиент давления равен предельному.

Позднее вернемся к анализу найденного решения. Воспользуемся тем же приближенным подходом для того, чтобы рассмотреть пуск скважины с постоянным забойным давлением $p_w = P_w^0 < 0$. Приняв вновь приближенное распределение скорости фильтрации в виде (III.71), после несложных выкладок получим

$$Q(t) = -\frac{2\pi kh}{\mu}(P_w + Gl)/\left(\ln\frac{l}{\rho} - 1\right); \quad P_w > -Gl;\ \rho \ll l,$$

$$\frac{d}{dt}\left(Ql^2 + \frac{4\pi khG}{\mu}l^3\right) = 12\varkappa Q, \qquad \text{(III.77)}$$

где ρ — радиус скважины.

Последние соотношения приводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для l. При малых временах, $\rho \ll l \ll -P_w/G$ предельный градиент давления не проявляется. При этом

$$l \approx (12\varkappa t)^{1/2}, \quad Q \approx -2\pi khP_w/\mu \ln(l/\rho). \qquad \text{(III.78)}$$

С другой стороны, при $l \to -P_w/G = l_\infty$ дебит $Q \to 0$, и из (III.77) легко находим, что с увеличением времени ($t \to \infty$) граница зоны возмущения асимптотически стремится к l_∞; распределение давления при этом стремится к предельному

$$p_-(r) = P_w + (r - \rho)G, \quad r \leqslant l_\infty. \qquad \text{(III.79)}$$

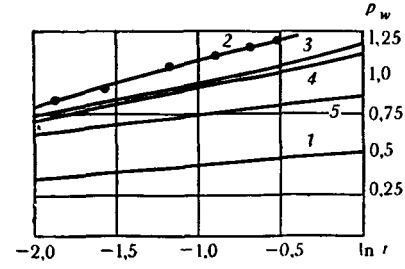
При этом дебит Q с возрастанием t стремится к нулю экспоненциально, и, следовательно, суммарный отбор жидкости из скважины V за бесконечное время при фиксированной депрессии P_w конечен. Этому соответствуют конечность воронки депрессии и области дренирования скважины после прекращения притока. Из соображений баланса находим предельный суммарный отбор жидкости из скважины

$$V_\infty = \int_0^\infty \frac{2\pi hmr}{K} p_-(r)\,dr = \frac{2\pi mhP_w^3}{3KG^2}. \qquad \text{(III.80)}$$

Конечность зоны дренирования может приводить к заметному снижению степени извлечения жидкости из пласта при разработке на истощение. Имеется ряд указаний на то, что этот эффект существен при разработке также и газовых месторождений, приуроченных к глинизированным коллекторам, когда для газа обнаруживается пороговый градиент давления (см. далее задачу 3).

РИС. 29. Изменение давления при пуске скважины:

1 — линейный закон фильтрации; *2* — фильтрация с предельным градиентом в отсутствие внешнего потока; *3—5* — при наличии внешнего однородного потока различной интенсивности



Взаимодействие возмущений с внешним потоком. Взаимодействие эффектов нелинейной фильтрации и неоднородности фильтрационного потока может определяющим образом влиять на характер нестационарных процессов. Из всего многообразия возникающих здесь вопросов мы рассмотрим только влияние внешнего потока на распространение возмущений от скважины. Поскольку в данном случае речь идет, главным обра-

зом, о сложных двумерных течениях, ниже приводятся в основном результаты численного решения соответствующих задач. Однако некоторые существенные моменты удается обнаружить на следующем сравнительно простом примере. Допустим, что в начальный момент в пласте существует стационарное течение без застойных зон ($u>0$), которому отвечает распределение $P(x, y, z)$ а в момент $t=0$ начинается нестационарный процесс, характеризуемый возмущением давления p (x, y, z, t). Будем полагать это возмущение малым, так что в любой точке пласта

$$|\nabla\tilde{p}| \ll |\nabla P|. \tag{III.81}$$

Тогда для возмущений давления $\tilde{p}$ можно получить приближенное линейное уравнение, если подставить в (III.66) $p=P+\tilde{p}$ и провести разложение по степеням $\tilde{p}$, ограничившись линейными членами. Учитывая, что P — решение уравнения (III.66), получим, очевидно,

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t} = \frac{K\lambda}{m}\left[\nabla\Psi\left(\frac{|\nabla P|}{\Pi}\right)\frac{\nabla\tilde{p}}{|\nabla P|} + \left\{\Psi'\left(\frac{|\nabla P|}{\Pi}\right) - \Pi\Psi\left(\frac{\nabla P}{\Pi}\right)\right\}\frac{\nabla P(\nabla P\nabla\tilde{p})}{\Pi|\nabla P|^3}\right]. \tag{III.82}$$

Напомним, что $P(x, y, z)$ считается здесь известным, так что (III.82) представляет собой линейное параболическое уравнение относительно возмущения $\tilde{p}$. В частности, если невозмущенное течение представляет собой однородный поток с градиентом давления Π_0, уравнение (III.82) принимает вид

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t} = \frac{K\lambda\Psi_0}{m\Pi_0}\left(\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial y^2} + \frac{\Psi_0'}{\Psi_0}\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial x^2}\right); \quad \varkappa_0 = \frac{K\lambda\Psi_0}{m\Pi_0}. \tag{III.83}$$

Уравнение (III.83) — линейное уравнение теплопроводности в анизотропной среде с коэффициентами проводимости, различными по осям x и y. Коэффициенты проводимости составляют: $\varkappa_0$ по оси y и $\varkappa_0\Psi_0'/\Psi_0$ по оси x. Их отношение равно отношению угловых коэффициентов касательной к кривой $\Psi(\zeta)$ в точке $\zeta = \Pi_0/\Pi$ и секущей, проведенной из начала координат в ту же точку. Для псевдопластического характера закона фильтрации ($\Psi'' > 0$) это отношение всегда больше единицы. Вообще говоря, оно зависит от интенсивности невозмущенного течения и, в частности, для закона фильтрации с предельным градиентом ($\Psi(\zeta) = \zeta - 1$, $\Pi = G$) монотонно убывает от бесконечности до единицы с ростом интенсивности течения от $\Pi = G$ до бесконечности.

Нетрудно убедиться непосредственно в том, что локально в каждой точке неоднородного потока структура уравнения для возмущений будет близка к (III.83), если под x и y понимать оси, ориентированные по невозмущенному потоку и по нормали к нему.

Уравнение (III.83) преобразованием

$$X = x(\Psi_0')^{-1/2}, \quad Y = y\Psi_0^{-1/2} \tag{III.84}$$

сводится к обычному уравнению теплопроводности.

В частности, если начальное возмущение создается в начале координат ($x = y = 0$), то в системе XOY задача осесимметрична:

$$\tilde{p} = \tilde{p}(R, t); \quad R^2 = X^2 + Y^2. \tag{III.85}$$

С учетом (III.84) это означает, что в исходной системе xOy линии уровня возмущения $\tilde{p}(x, y, t)$ — эллипсы, определяемые уравнением

$$(x/\Psi_0')^2 + (y/\Psi_0)^2 = \text{const}. \tag{III.86}$$

Следовательно, возмущение давления распространяется по однородному начальному потоку с различной скоростью в разных направлениях — нестационарный процесс обладает «наведенной анизотропией». Приведенный анализ нельзя непосредственно использовать для исследования основной задачи о возмущении однородного потока при пуске скважины, поскольку в этом случае возмущения градиента давления вблизи скважины не малы. Однако можно ожидать, что характер изменения давления качественно будет таким же, как и в рассмотренной линеаризованной задаче.

Численные расчеты[1] возмущения, вносимого в однородный фильтрационный поток пущенной в работу скважиной, в основном подтверждают эти предположения. На рис. 30 показано распространение линии уровня возмущения, отвечающей $\tilde{p} = 0{,}05\ QG/\lambda$ при различных значениях интенсивности исходного потока.

Помимо предсказанной нами заранее анизотропии распространения возмущений (тем сильнее выраженной, чем меньше интенсивность внешнего потока) наблюдается и своеобразный их «снос» внешним потоком. Этот существенно нелинейный эффект объясняется тем, что внешний поток и поток от скважины с одной стороны от нее (см. рис. 30, слева) противоположно направлены, в результате чего образуется застойная зона. Последствия такого локализованного вблизи скважины взаимодействия проявляются и на удалении от нее, где линии уровня давления оказываются смещенными по потоку.

Анализ динамики изменения давления в скважине при пуске ее в работу показывает, что внешний поток может оказывать на нее существенное влияние. Из рис. 29 видно, прежде всего, что достаточно сравнительно слабого внешнего потока для того, чтобы кривая изменения давления (т. е. зависимость давления в скважине от времени) стала существенно отличной от кривой, рассчитанной для осесимметричного притока в невозмущенном пласте. С увеличением интенсивности внешнего потока это различие растет, и кривая изменения давления приближается к кривой, отвечающей линейному закону фильтрации.

Анализ данных исследования скважин. Как уже говорилось, основная цель исследования нестационарных

[1] Приводимые в этом параграфе данные численных расчетов получены в ИПМ АН СССР Ф. Д. Турецкой.

процесов состоит в том, чтобы дать методы определения параметров пластов по данным исследования скважин. В тех случаях, когда речь идет о течениях, не следующих закону Дарси, эта задача, непростая сама по себе, становится особенно трудной.

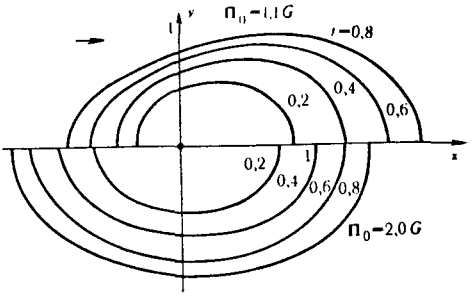


РИС. 30. Распространение линий уровня возмущений от скважины при наличии однородного внешнего потока

Главная трудность состоит в том, что нельзя заранее указать, какого рода отклонения от идеальной модели упругого режима фильтрации присущи исследуемому объекту. Так, искривление индикаторных диаграмм скважин может быть вызвано не только нелинейностью закона фильтрации, но и разгазированием нефти, нелинейно-упругой деформацией пласта в целом или раскрытием трещин в прискважинной зоне и т. д. Далее, если даже установлено, что нелинейность обусловлена нарушением закона Дарси, остается проблема выбора между, допустим, законом фильтрации с предельным градиентом давления и степенным законом фильтрации.

В настоящее время нет законченной методики анализа результатов наблюдений, позволяющей решать сформулированную выше проблему выбора. Более того, уже ясно, что такая методика не может быть чисто гидродинамической, а должна использовать всю совокупность сведений о пласте для уменьшения числа конкурирующих гипотез.

Ниже рассматривается только вопрос о различении эффектов нарушения закона Дарси и нелинейно-упругого режима по данным исследования скважин. Этот вопрос был детально исследован в последнее время численно.

Рассматривается пуск в работу скважины в первоначально невозмущенном пласте с постоянным начальным давлением P_0, причем предполагается, что проницаемость k и пористость m зависят от давления и использована экспоненциальная аппроксимация

$$k(p) = k_0 \exp[\alpha_k (p - P_0)]; \quad m(p) = m_0 \exp[\alpha_m (p - P_0)]. \quad \text{(III.87)}$$

Одновременно допускается, что движение следует закону фильтрации с предельным градиентом вида (III.9) с постоянным значением G. Были рассмотрены различные режимы изменения дебита скважины во времени и соответствующие им режимы изменения давления в скважине и на удалении от нее.

На рис. 31 показаны кривые относительного изменения давления $\Delta p/Q$ при пуске скважины с постоянным дебитом при нелинейно-упругом режиме ($G = 0$) и слабо меняющейся пористости ($\alpha_m = 0$)

для различных значений единственного безразмерного параметра задачи ($Q > 0$ отвечает закачке, $Q < 0$ — отбору жидкости)

$$A = \frac{\alpha\mu Q}{k_0 h}, \quad \alpha = \alpha_k.$$

С ростом параметра A относительное изменение давления уменьшается. Если учесть, что в широком диапазоне изменения A зависимость $\Delta p/Q$ от $\ln t$ достаточно близка к линейной (см. рис. 31), то при любой интерпретации результатов исследований с ростом интенсивности закачки увеличивается эффективная гидропроводность пласта (kh/μ), определенная по кривым изменения давления (соответственно уменьшается гидропроводность с увеличением интенсивности отбора).

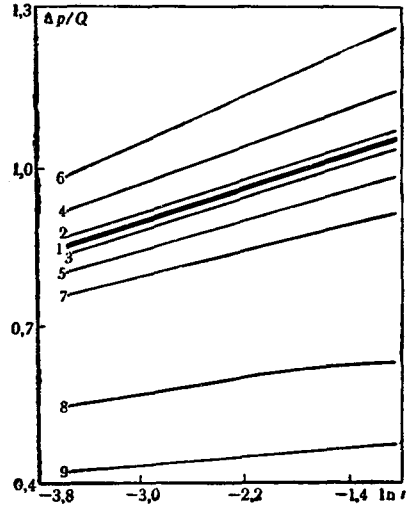
Если не учитывать зависимости проницаемости и пористости от давления, но считать закон фильтрации нелинейным псевдопластическим (рост относительной подвижности с ростом скорости фильтрации, $\Phi''(U) < 0$), то анализ кривых изменения давления при пуске скважины по стандартной методике [11] приводит к выводу, что эффективная гидропроводность возрастает с увеличением абсолютного значения дебита, при котором проведено исследование скважины. Причем, если закон фильтрации аппроксимируется степенной зависимостью $\Phi(U) = U^s$, то зависимость эффектной гидропроводности от дебита также степенная:

$$(kh/\mu)_{эф} \sim |Q|^{\zeta}, \quad \zeta = 2(s-1)/(3-s). \qquad \text{(III.88)}$$

Таким образом, основное отличие между эффектами нелинейно-упругого режима и нелинейной фильтрации при исследовании скважин проявляется в том, что первым соответствует рост эффективной гидропроводности с ростом дебита при закачке и падение при отборе; вторым — рост гидропроводности с ростом дебита как для закачки, так и для отбора (рис. 32). Легко убедиться, что это — общий факт, не зависящий от принятых аппроксимаций. Такое отличие служит своего рода «диагностическим признаком» для различения двух причин нелинейности.

РИС. 31. Кривые относительного изменения давления.

Значения A: *1* — 0; *2* — —0,03; *3* — 0,03; *4* — —0,15; *5* — 0,15; *6* — —0,3; *7* — 0,3; *8* — 1,5; *9* — 3,0



Можно предположить методику выделения каждого из этих эффектов, выделяя четную и нечетную по Q части зависимости $\Delta p/Q$ от Q.

Другим важным диагносцирующим признаком может быть характер распространения возмущений на больших расстояниях от

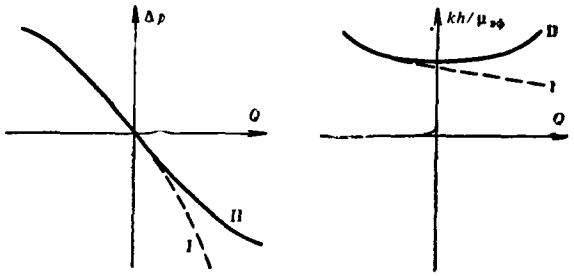


РИС. 32. Изменение эффективной гидропроводности при нелинейно-упругом режиме (*I*) и нелинейной фильтрации (*II*)

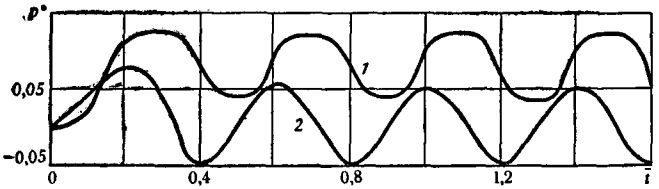


РИС. 33. Изменение давления при периодическом возбуждении скважины: *1*— вдали от скважины; *2* —в точке, близкой к скважине

скважины. В этой области давление мало отклоняется от невозмущенного, а скорости фильтрации близки к нулю. Поэтому очевидно, что здесь нелинейно-упругие эффекты слабы, а эффекты нелинейной фильтрации, в особенности типа предельного градиента давления, выражены особенно сильно. Так, на рис. 33 показано изменение давления на различных расстояниях от возмущающей скважины при периодическом (со сменой знака) изменении дебита в ней.

Помимо относительно быстрого затухания возмущений и конечности расстояния, на которое они распространяются, существенно, что с растоянием последовательные импульсы давления не сглаживаются, а все более приближаются по форме к прямоугольным. Этот качественный признак можно использовать для установления наличия в пластовых условиях предельного градиента давления.

Задача 1. Показать, что решение задачи о притоке к скважине, пущенной в работу с постоянным дебитом Q, автомодельно при степенном законе фильтрации. Исследовать зависимость давления в точке наблюдения от времени. Получить зависимость (III.88).

Задача 2. Объяснить качественно эффект перестройки импульсов в прямоугольные при фильтрации с предельным градиентом.

Задача 3. Определить максимальный возможный отбор газа в расчете на одну скважину, если начальное пластовое давление p_0, минимально допустимое давление на забое p и движение газа следует закону фильтрации

$$\rho\vec{u} = -\frac{k\rho_0}{2\mu p_0}(\nabla p^2 - \Pi\nabla p^2/|\nabla p^2|); \quad |\nabla p^2| > \Pi, \quad \rho\vec{u} = 0, \quad |\nabla p^2| < \Pi.$$

§ 4. Неравновесность при фильтрации однородных жидкостей. Движение в трещиновато-пористых и слоисто-неоднородных пластах[1]

Вводя в качестве основных локальных характеристик фильтрационного движения давление p и скорость фильтрации $\boldsymbol{u}$ (а в некоторых случаях и температуру пористой среды T), мы неявно допускаем, что в пределах физически бесконечно малого объема пористой среды эти величины изменяются незначительно.

В свою очередь, это означает, что локально каждый элемент среды находится в состоянии термодинамического равновесия. Такое допущение справедливо, пока рассматриваются процессы существенно более длительные, нежели процесс установления термодинамического равновесия в физически бесконечно малом объеме пористой среды. Однако в некоторых существенных для приложений случаях строение реальных объектов таково, что «элементарный объем» достаточно велик, а процесы установления термодинамического равновесия в нем настолько замедленны, что их длительность оказывается сопоставимой со временем переходного процесса в пласте в целом. Тогда эти неравновесные процессы подлежат учету и их влияние может оказаться определяющим. Именно так обстоит дело в некоторых задачах двухфазной фильтрации (см. гл. IV). В этом параграфе рассматриваются неравновесные процессы, происходящие при неустановившемся движении однородной, ньютоновской жидкости в трещиновато-пористых и слоистых пластах.

Фильтрация однородной жидкости в трещиновато-пористой среде. Ряд крупнейших месторождений нефти приурочен к трещиноватым породам, в которых существует развитая система трещин, полностью или частично, наряду с порами, обусловливающая фильтрационные свойства среды. Специфика такой среды обусловлена тем, что трещина, в отличие от пор, имеющих все размеры одного порядка, это — узкая щель, два измерения которой на несколько порядков больше третьего. В результате даже при самом незначительном объеме трещин в общем объеме пустот твердого скелета они могут оказывать определяющее влияние на движение жидкости.

Обычно различают чисто трещиноватые и трещиновато-пористые среды. Первые из них представляют собой блоки горной породы, между которыми имеются трещины, причем сами блоки непроницаемы и не обмениваются жидкостью с трещинами (например, трещиноватые граниты); в трещиновато-пористой среде блоки представляют собой куски обычной пористой среды, обла-

[1] Основные положения теории нестационарной фильтрации в трещиновато-пористых средах были сформулированы в работах Г. И. Баренблатта, Ю. П. Желтова и И. Н. Кочиной [7], а затем развиты многими исследователями — см. более подробное изложение и библиографию [6, 21, 34].

дающей пористостью и проницаемостью (трещиноватый известняк). Во всех случаях объем трещин пренебрежимо мал по сравнению с общим объемом, занятым твердым скелетом и пустотами, в большинстве случаев он мал и по сравнению с общим объемом пустот, складывающимся из объема порового пространства пористых блоков и объема самых трещин. Лишь в тех случаях, когда собственная пористость блоков практически равна нулю (например, у трещиноватых изверженных пород), приходится принимать в расчет объем собственно трещин.

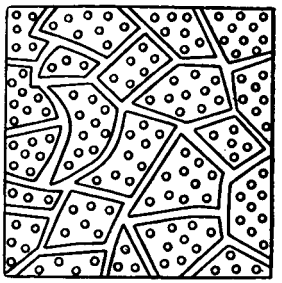


РИС. 34. Схема трещиновато-пористого пласта

Напротив, в большинстве случаев гидравлическая проводимость системы трещин во много раз больше гидравлической проводимости блоков. Поэтому можно сказать, что в трещиновато-пористой среде жидкость «хранится» в пористых блоках, а перемещается по трещинам. При стационарном движении жидкости это не приводит к существенным отличиям от обычной пористой среды. Однако при нестационарных процессах и в процессе вытеснения одной жидкости другой проявляется ряд важных особенностей. Фильтрация в чисто трещиноватых средах происходит качественно так же, как в обычных пористых, лишь с небольшими количественными отклонениями. Поэтому в дальнейшем основное внимание уделяется трещиновато-пористым средам.

Закон фильтрации. Для ламинарного движения вязкой жидкости в щели с параллельными стенками справедлива формула Буссинеска

$$Q = -\frac{bh^3}{12\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}. \qquad \text{(III.89)}$$

Здесь Q — расход жидкости; b — ширина щели в сечении, перпендикулярном к оси x; h — раскрытие щели; μ — вязкость жидкости; p — давление.

Существование такой простой формулы, справедливой для движения в отдельной трещине, побудило многих исследователей к поискам выражений, описывающих течение в упорядоченной системе трещин. Однако более эффективным оказалось описание течения в трещиновато-пористой породе методами механики сплошной среды.

Допустим, что трещиновато-пористая среда состоит из системы блоков, отделенных друг от друга трещинами, причем форма и расположение блоков нерегулярны (рис. 34). Возьмем в качестве элементарного макрообъема (см. гл. I) объем, размеры которого велики по сравнению с размерами отдельного блока, а следовательно, и интересующие нас процессы происходят в масштабе, значительно более крупном, чем размер блока. (Размеры блоков и, следовательно, длина трещин l бывают самыми различными. Излагаемый подход основан на предположении, что

$d \ll l \ll L$, т. е. блоки велики по сравнению с размером пор d, но малы по сравнению с размером пласта L). Рассмотрим вначале наиболее существенный случай, когда проницаемость блоков мала настолько, что при описании макроскопического движения жидкости ею можно пренебречь. Считая движение в трещинах медленным (безынерционным), можно записать для него закон Дарси, который выводится из анализа размерности так же, как и в гл. I. При этом, учитывая возможную анизотропию системы трещин и то, что каждая из них характеризуется двумя размерами — длиной l и раскрытием h, формулу закона фильтрации удобно представить в виде:

$$u_i = -\frac{k_{ij}}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_j} \equiv -\frac{h^3}{\mu l} k^0_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}. \qquad \text{(III.90)}$$

Здесь u_i — компоненты вектора скорости фильтрации, определяемого обычным образом; k_{ij} — тензор трещинной проницаемости; h — среднее раскрытие трещин; l — характерный размер блока. Конкретный вид безразмерного тензора проницаемости k^0_{ij} определяется геометрией системы трещин; для среды, состоящей из непроницаемых блоков и нескольких систем плоских регулярно расположенных трещин, он может быть получен на основании формулы Буссинеска (II.89).

В общем случае трещиновато-пористой среды формулу закона фильтрации также можно записать в виде (III.90).

Неравновесность распределения давлений. Как уже упоминалось, характерная особенность трещиновато-пористой среды состоит в том, что движение жидкости в ней происходит в основном по трещинам, в то время как объем трещин мал и основные запасы жидкости заключаются в пористых блоках. Предположим, что на границе трещиновато-пористого пласта, жидкость в котором первоначально находилась под давлением P_0, происходит снижение давления до некоторого иного значения P_1. Пренебрегая проницаемостью блоков, можно использовать для описания движения в трещинах обычные соотношения теории фильтрации в пористой среде (например, в случае слабосжимаемой жидкости и упруго деформируемого пласта — уравнения теории упругого режима). После некоторого переходного процесса в трещинах установится новое стационарное распределение давления, причем, по крайней мере вблизи границы пласта, давление окажется значительно ниже первоначального. Поскольку давление в блоках в силу предположений их непроницаемости не могло измениться, то между жидкостью в блоках и жидкостью в трещинах создается значительная разность давлений — порядка $P_0 - P_1$, а следовательно, в блоках возникают локальные градиенты давлений $\sim (P_0 - P_1)/l$, значительно превосходящие существующий в пласте градиент давления в трещинах $\sim (P_0 - P_1)/L$. В этих условиях в пласте даже при самой незначительной проницаемости блоков возникают локальные фильтрационные потоки,

обусловливающие приток жидкости из блоков в трещины и выравнивание местных разностей давлений между блоками и трещинами.

Тот факт, что в трещиновато-пористой среде могут в нестационарном процессе возникать местные разности давлений и местные перетоки между блоками и трещинами, лежит в основе описания среды, состоящей из малопроницаемых пористых блоков и трещин, при малом суммарном объеме трещин.

Введем вместо одного давления жидкости в данной точке среды два — давление в трещинах p_1 и давление в порах блоков p_2. В предположении, что проницаемость блоков k_2 очень мала, можно для определения фильтрационного потока в жидкости через некоторую площадку среды использовать уравнение (III.90), подставляя в него значение давления в трещинах p_1.

Составим уравнения баланса жидкости в трещинах и блоках. Обозначая через m_1 трещинную пористость (отношения объема трещин к полному объему среды), имеем

$$\frac{\partial (m_1 \rho)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{u}) - q = 0, \tag{III.91}$$

где q — количество жидкости, перетекающее за единицу времени из блоков в трещины в единице объема среды.

Для блоков можно пренебречь непосредственно фильтрационным потоком, так что уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial (m_2 \rho)}{\partial t} + q = 0, \tag{III.92}$$

где m_2 — пористость блоков (в расчете на общий объем среды).

Для того, чтобы замкнуть полученную систему уравнений, нужно, помимо уравнения состояния жидкости и уравнений, связывающих изменения пористостей m_1 и m_2 с давлением, дать и выражение для потока q. Это выражение можно получить из анализа размерностей. Заметим прежде всего, что поскольку движение жидкости в пласте считается безынерционным, то безынерционным должно быть и движение жидкости в блоках. Далее, поток q может зависеть от давлений в блоках p_2 и в трещинах p_1, размера l и проницаемости k_2 блоков, вязкости жидкости μ, ее плотности ρ и должен обращаться в нуль при равенстве давлений p_1 и p_2. Предположим вначале, что плотность ρ и вязкость μ жидкости мало зависят от давления и их можно считать постоянными, равно как и проницаемость блоков k_2. Тогда выражение для q должно быть инвариантным относительно выбора начала отсчета давления и может зависеть лишь от разности $p_1 - p_2$. Таким образом, q зависит от размерных величин $p_2 - p_1$, ρ, μ, k_2, l.

Заметим теперь, что вследствие безынерционности движения размерности проницаемости, давления и вязкости могут быть выбраны независимо, при одном лишь условии $[k_2][p][\mu]^{-1} = L^2T^{-1}$; по той же причине можно считать, что размерность массы M не связана

с размерностью давления или вязкости.

Отсюда следует

$$q = \alpha \frac{\rho k_2}{\mu} \frac{p_2 - p_1}{l^2}, \qquad \text{(III.93)}$$

где α — безразмерная постоянная, характеризующая геометрию среды. Соотношение (III.93) должно быть уточнено в случае, если плотность жидкости ρ и вязкость ее μ зависят от давления.

Например, при фильтрации термодинамически идеального газа имеем

$$q = \frac{\alpha \rho_0 k_0}{2 l^2 p_0^2 \mu} (p_2^2 - p_1^2), \qquad \text{(III.94)}$$

где p_0 — давление, отвечающее плотности ρ_0.

Трещинная пористость m_1 обычно мала, и ею в большинстве случаев можно пренебречь, если среда трещиновато-пористая (но не чисто трещиноватая), а пористость блоков m_2 считать функцией обоих давлений p_1 и p_2. Ограничиваясь линейным приближением, имеем соотношение

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} = m_{20} \left(\beta_{21} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \beta_{22} \frac{\partial p_2}{\partial t} \right), \qquad \text{(III.95)}$$

где величины β_{21}, β_{22} и m_{20} можно считать постоянными.

Изменение пористости m, как обычно, следует учитывать лишь в тех выражениях, где она дифференцируется. Кроме того, поскольку m входит в уравнения только в произведении с плотностью ρ, изменения пористости существенны лишь в случае слабосжимаемой (капельной) жидкости; при фильтрации газа ими можно пренебречь. Ограничиваясь случаем капельной жидкости, имеем

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_* (p - p_0)], \qquad \text{(III.96)}$$

где $p = p_1$, p_2 — в зависимости от того, рассматривается жидкость в трещинах или в блоках.

Подставляя выражения (III.90), (III.95) и (III.96) в (III.91) и (III.92) и полагая $m_1 = 0$, имеем систему уравнений

$$\frac{\rho_0}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial p_1}{\partial x_i} \right) - \frac{\alpha \rho_0 k_2}{l^2} \frac{p_2 - p_1}{\mu} = 0;$$

$$m_0 \rho_0 \left[-\beta_{21} \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\beta_{22} + \beta_*) \frac{\partial p_2}{\partial t} \right] + \frac{\alpha \rho_0 k_2}{l^2} \frac{p_2 - p_1}{\mu} = 0. \qquad \text{(III.97)}$$

Чаще всего рассматривается случай, когда среда однородна и изотропна, так что проницаемость выражается шаровым тензором $k_{ij} = k_1 \delta_{ij}$. При этом система (III.97) принимает простой вид:

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} - \beta \frac{\partial p_1}{\partial t} - A(p_2 - p_1) = 0, \quad \varkappa \nabla^2 p_1 - A(p_2 - p_1) = 0, \quad \text{(III.98)}$$

где

$$A = \frac{\alpha k_2}{\mu l^2 m_0 (\beta_{22} + \beta_*)}; \quad \varkappa = \frac{k_1}{\mu m_0 (\beta_{22} + \beta_*)}; \quad \beta = \frac{\beta_{21}}{\beta_{22} + \beta_*}.$$

Из системы (III.98) можно исключить одно из давлений. Определив из второго уравнения p_2 и подставив полученное значение в первое уравнение, имеем

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta \frac{\partial \nabla^2 p_1}{\partial t} = \frac{\varkappa}{1-\beta} \nabla^2 p_1; \quad \eta = \frac{\varkappa}{A(1-\beta)} = \frac{k_1 l^2}{\alpha k_2 (1-\beta)}. \quad \text{(III.99)}$$

В пределе при $\eta \to 0$, что соответствует беспрепятственному обмену жидкостью между блоками и трещинами, уравнение (III.99) переходит в обычное уравнение упругого режима с коэффициентом пьезопроводности $\varkappa/(1-\beta)$. Нетрудно видеть, что этот коэффициент пьезопроводности отвечает проницаемости системы трещин и пористости и сжимаемости блоков.

Особенности постановки задач фильтрации в трещиновато-пористых средах. Уравнение (III.99) и система (III.98) обладают рядом особенностей, которые на первый взгляд кажутся необычными и причина которых лежит в вырожденном характере рассматриваемой системы, относящейся к среде с пренебрежимо малыми трещинной пористостью и проницаемостью блоков. В связи с этим представляет интерес исследование свойств решений этой системы.

Заметим, что уравнению вида (III.99) удовлетворяет не только давление p_1, но и давление p_2 и, следовательно, любая их линейная комбинация. Чтобы убедиться в этом, достаточно второе уравнение (III.99) умножить на β/A и продифференцировать по t, а затем прибавить к исходному уравнению. После этого из системы (III.98) легко исключается p_1. Это показывает, что обоим давлениям и любой их комбинации присущи те свойства, которыми должно обладать любое решение уравнения (III.99). Вместе с тем, как нетрудно убедиться, не все эти линейные комбинации равноправны. Среди них есть одна, а именно $p = p_2 - \beta p_1$, которая должна быть непрерывной по времени в замкнутой области определения решения, включая и границу $t = 0$. Действительно, пусть надо найти ограниченное решение системы уравнений (III.98) в пространственной области D при $0 \leqslant t \leqslant T$; заданы начальные распределения давлений p_1 и p_2. Интегрируя первое уравнение (III.98) по малому промежутку времени $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ и устремляя ε к нулю, находим

$$\lim_{t \to 0} p(x, t) = p(x, 0).$$

Представим теперь второе уравнение системы (III.98) в виде:

$$-Ap + (1 - \beta) Ap_1 + \varkappa \nabla^2 p_1 = 0.$$

Если выбирать достаточно малые моменты времени, то первый член этого выражения будет стремиться к своему начальному значению $p(x, 0)$. Следовательно, к такому же значению с обратным знаком будет стремиться и сумма двух других членов. Поэтому для того, чтобы давление $p_1(x, t)$ было непрерывным при $t \to 0$, необходимо, чтобы начальное распределение $p_1(x, 0)$ удовлетворяло уравнению

$$\varkappa \nabla^2 p_1 + (1 - \beta) Ap_1 = Ap(x, 0) \qquad \text{(III.100)}$$

при соответствующих граничных условиях. В противном случае давление $p_1(x, t)$ в трещинах при $t = 0$ скачкообразно изменяется в соответствии с уравнением (III.98). Если $\beta \neq 0$ и поэтому $p \neq p_2$, происходит также и мгновенное перераспределение давления в порах p_2 при неизменном p. Это имеет простой физический смысл. Изменение давлений p_1 и p_2 вызывает изменение массы жидкости, заполняющей пористые блоки, что приводит к перетоку некоторого количества жидкости из блоков в трещины или обратно. Если изменение массы жидкости конечно (не бесконечно мало), оно требует конечного времени, так как происходит под действием ограниченных сил давления, которые не могут вызвать бесконечно больших скоростей перетока. Это показывает, что мгновенное изменение массы, заключенной в блоках жидкости, невозможно, а следовательно, невозможно и мгновенное изменение приведенного давления $p = p_2 - \beta p_1$, однозначно связанного с этой массой. Если же p_1 и p_2 одновременно изменяются скачком таким образом, что приведенное давление p не меняется, то перемещения жидкости не происходит и такое согласованное мгновенное изменение давлений возможно. Если учесть также собственный объем трещин, то появится также и другая независимая комбинация давлений p', определяющая изменение эффективного объема трещин; давления p_1 и p_2 окажутся непрерывными при $t = 0$, и необходимо будет задавать их начальные значения отдельно.

Другая особенность системы (III.98) заключается в том, что в ней исключен за малостью поток жидкости непосредственно по пористым блокам. Поэтому выравнивание разности поровых давлений между двумя соседними точками среды может происходить лишь посредством обмена жидкостью между блоками и трещинами и перемещения ее по трещинам. В результате в трещиновато-пористой среде, описываемой уравнениями (III.98), могут существовать разрывы непрерывности (скачки) порового давления, которые не исчезают мгновенно (как при упругом режиме), а затухают во времени по экспоненциальному закону. Чтобы убедиться в этом, установим условия на скачках для решений системы (III.98).

Рассмотрим изолированную поверхность разрыва Σ. При выводе условий на скачках ее можно считать плоской и принять за плоскость $x = 0$.

Проинтегрируем второе уравнение (III.98) по x в пределах от $-\varepsilon$ до ε. В силу ограниченности p_2, p_1, $\partial^2 p_1/\partial y^2$ и $\partial^2 p_1/\partial z^2$ при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}\Bigg|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[\frac{A}{\varkappa}(p_2 - p_1) - \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}\right] dx \to 0.$$

Таким образом, производная $\partial p_1/\partial x$, а вместе с ней и само давление в трещинах p_1 непрерывны на поверхности Σ.

Запишем теперь первое уравнение системы (III.98) для точек впереди поверхности разрыва ($x = +0$) и для точек за этой поверхностью ($x = -0$), обозначая соответствующие значения знаками $+$ и $-$, и вычтем полученные уравнения друг из друга. Имеем

$$\frac{\partial (p_2^+ - p_2^-)}{\partial t} - \beta \frac{\partial (p_1^+ - p_1^-)}{\partial t} + A[(p_2^+ - p_1^+) - (p_2^- - p_1^-)] = 0.$$

По доказанному, $[p_1] = p_1^+ - p_1^- = 0$, так что для скачка давления $[p_2] = p_2^+ - p_2^-$ имеем

$$\partial [p_2]/\partial t + A[p_2] = 0. \qquad \text{(III.101)}$$

Таким образом, скачки порового давления p_2 должны удовлетворять уравнению (III.101) или после интегрирования

$$[p_2] = [p_2]_0 \exp(-At). \qquad \text{(III.102)}$$

Здесь через $[p_2]_0$ обозначен начальный скачок в момент $t = 0$. Допустим теперь, что вблизи поверхности Σ' (являющейся или не являющейся поверхностью разрыва давления p_2) производная $\partial p_1/\partial x$ непрерывна. Тогда первое уравнение системы (III.98) можно вне поверхности Σ' (принимаемой за плоскость $x = 0$) продифференцировать по x, получив при этом

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x}\right) + A\frac{\partial p_2}{\partial x} = 0. \qquad \text{(III.103)}$$

Применяя к этому уравнению те же рассуждения, что и выше, и используя непрерывность производной $\partial p_1/\partial x$ на поверхности Σ', получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial p_2}{\partial x}\right] + A\left[\frac{\partial p_2}{\partial x}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial p_2}{\partial x}\right] = \left[\frac{\partial p_2}{\partial x}\right]_0 \exp(-At). \qquad \text{(III.104)}$$

Отмеченные особенности решений уравнения (III.99) и системы (III.98) порождают соответствующие особенности в постановке граничных и начальных условий, которым должны удовлетворять эти решения.

Прежде всего, как уже было сказано, нельзя требовать, чтобы при стремлении t к нулю оба давления (в порах и трещинах) принимали заранее заданные значения $p_1(0, x, y, z)$; $p_2(0, x, y, z)$. Обязательно соблюдение условия непрерывности приведенного давления $\rho = p_2 - \beta p_1$, тогда давление в трещинах p_1 определяется из

уравнения (III.100) и может оказаться разрывным. Таким образом, начальное условие будет иметь вид:

$$p(0, x, y, z) = p_2(0, x, y, z) - \beta p_1(0, x, y, z) = f(x, y, z). \quad \text{(III.105)}$$

В свою очередь, при стремлении к границе области лишь давление в трещинах p_1 должно быть непрерывно вместе со своими производными.

Динамические процессы в окрестности скважины. Хотя уравнения нестационарной фильтрации в трещиновато-пористом пласте и сложнее уравнений пьезопроводности, будучи линейными, они допускают полное исследование стандартными методами. Проследим специфику переходных процессов в трещиновато-пористой среде на примере течения вблизи скважины.

Рассмотрим осесимметричную задачу, предполагая, что в пласт, находящийся при постоянном давлении $p_0 = 0$, начинается закачка жидкости с расходом Q через скважину пренебрежимо малого радиуса.

В цилиндрических координатах рассматриваемая задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = \varkappa \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial p_1}{\partial r}\right) \quad \text{(III.106)}$$

при условиях

$$p_1(0, r) = 0; \quad p_1(t, \infty) = 0; \quad \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r}\right)_{r=0} = -\frac{\mu Q(t)}{2\pi k_1 h} = -p_*(t). \quad \text{(III.107)}$$

Эта задача сформулирована для давления в трещинах p_1; при желании ее можно сформулировать для давления в пористых блоках p_2. Тогда краевое условие при $r = 0$ примет вид:

$$\left(r \frac{\partial p_2}{\partial r}\right)_{r=0} + \eta/\varkappa \frac{\partial}{\partial t}\left(r \frac{\partial p_2}{\partial r}\right)_{r=0} = -p_*.$$

Остальные условия и основное уравнение останутся без изменения.

Применяя к соотношениям (III.106) — (III.107) преобразование Лапласа, получаем

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d\bar{p}_1}{dr}\right) - \frac{\sigma}{\varkappa + \eta\sigma}\bar{p}_1 = 0, \quad \left(r \frac{d\bar{p}_1}{dr}\right)_{r=0} = -\bar{p}_*, \quad \bar{p}_1(\infty) = 0. \quad \text{(III.108)}$$

Этим условиям удовлетворяет решение

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_* K_0\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\varkappa + \sigma\eta}}\, r\right), \quad \text{(III.109)}$$

где K_0 — функция Макдональда, так что по формуле обращения при $p_* = \text{const}$ (пуск с постоянным дебитом)

$$p_1(t, r) = \frac{p_*}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\sigma t}}{\sigma} K_0\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\varkappa + \sigma\eta}}\, r\right) d\sigma. \quad \text{(III.110)}$$

Этот интеграл может быть сведен к интегралу по вещественной переменной. Проанализируем лишь асимптотику полученного реше-

ния при малых значениях параметра $\rho = 2^{-1}r/\sqrt{\varkappa t}$. Представим выражение (III.110) в виде:

$$p_1(t, r) = \frac{p_*}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{\zeta}}{\zeta}K_0\left(r\sqrt{\frac{\zeta}{1+\zeta\eta/\varkappa t}}\right)d\zeta. \qquad \text{(III.111)}$$

При $\eta/\varkappa t \ll 1$ рассматриваемое выражение переходит в известную формулу теории упругого режима (см. § 4 гл. III). Если же $\eta/\varkappa t \gg 1$, то аргумент функции Макдональда равномерно мал, так что для нее можно воспользоваться приближенным представлением

$$K_0(z) = -\left(C + \ln\frac{z}{2}\right) + o(1).$$

В результате получаем

$$p_1(t, r) = -p_*\left[C + \ln\left(2^{-1}r/\sqrt{\varkappa\eta}\right)\right], \quad r(\varkappa t)^{-1/2} \ll 1, \ \varkappa t/\eta \ll 1. \qquad \text{(III.112)}$$

Смысл соотношения (III.112) прост: оно означает, что если характерное время трещиновато-пористой среды $\theta = \eta/\varkappa$ не слишком мало, существует промежуточный квазистационарный режим, когда жидкость, поступающая из скважины, поглощается ближайшими к ней блоками. Лишь тогда, когда давление в блоках в окрестности скважины сравняется с давлением в трещинах (т. е. по истечении времени $\sim\theta$), начинает сказываться обмен жидкостью с более отдаленными участками пласта.

Отметим еще одно обстоятельство. Соотношение (III.112) показывает, что существует некоторый промежуток времени $r^2/\varkappa \ll t \ll \theta$, на протяжении которого давление в скважине не меняется. Если временем $r^2/\varkappa$ можно пренебречь (обычно это сотые доли секунды и менее), то из (III.112) следует, что при скачкообразном изменении дебита скважины давление в ней изменяется скачком, а затем сохраняет постоянное значение на протяжении времени $\sim\theta$. Это действительно наблюдается на практике и может быть использовано для оценки характерного времени θ. Допустим теперь, что дебит скважины изменяется периодически по гармоническому закону, так что

$$p_* = P_* e^{i\omega t}. \qquad \text{(III.113)}$$

Тогда в пласте со временем установится периодическое распределение давлений

$$p(r, t) = P(r)\, e^{i\omega t}, \qquad \text{(III.114)}$$

где $P(r)$ — комплексная амплитуда колебаний давления. Выражение для нее можно получить либо из задачи (III.106) — (III.107), либо по известным правилам операционного исчисления.

В результате получим

$$\frac{P(r)}{P_*} = K_0\left(\sqrt{\frac{i}{1+(i\omega\eta)/\varkappa}}\, r\sqrt{\frac{\omega}{\varkappa}}\right). \qquad \text{(III.115)}$$

Проанализируем это выражение при малых и больших значениях $\bar{r} = r(\omega/\varkappa)^{1/2}$. Если (например, когда измерения производятся

непосредственно в скважине) $\bar{r} \ll 1$, то можно воспользоваться известной асимптотикой

$$K_0(z) \simeq -(C + \ln z/2) + O(z^2).$$

Полагая здесь $z = (i/(1 + i\bar{\eta})^{1/2}\bar{r}$, получим

$$\frac{P(r)}{P_*} = -C + \ln \frac{r(\omega/\varkappa)^{1/2}}{2(1+\omega^2\eta^2/\varkappa^2)^{1/4}} + \frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\omega\eta}{\varkappa}\right). \quad \text{(III.116)}$$

Если

$$r \ll (\varkappa/\omega)^{1/2}, \quad \omega\theta \gg 1, \quad (r^2/\varkappa \ll 1/\omega \ll \theta, \quad r^2 \ll \eta),$$

то

$$P(r)/P_* = -C + \ln(2^{-1}r\eta^{-1/2}). \quad \text{(III.117)}$$

Колебания давления в окрестности скважины происходят синхронно с колебаниями дебита, причем таким образом, как если бы мы имели квазистационарную фильтрацию в пласте радиуса

$$R = 2e^C\eta^{1/2} = 3{,}56\eta^{1/2}. \quad \text{(III.118)}$$

При фиксированной амплитуде колебаний дебита амплитуда колебаний давления не зависит от частоты. Если $\omega\theta \ll 1$, $r \ll \sqrt{\varkappa/\omega}$, то

$$P(r) = -C + \ln[r(\omega/\varkappa)^{1/2}/2] + 1/4i\pi \quad \text{(III.119)}$$

и возникает сдвиг фаз, равный

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left[\frac{\pi}{2}/\ln\frac{r^2\omega}{4\varkappa e^C}\right]; \quad |P(r)|/P_* = \left(\frac{\pi^2}{16} + \ln^2\frac{r}{2e^C}\sqrt{\frac{\omega}{\varkappa}}\right)^{1/2}. \quad \text{(III.120)}$$

Такая асимптотика соответствует обычному упругому режиму; амплитуда колебаний давления падает с ростом частоты. Таким образом, с ростом частоты амплитуда колебаний давления падает, а сдвиг фаз возрастает примерно до $\omega \sim \varkappa/\eta = 1/\theta$, затем сдвиг фаз начинает падать, а амплитуда колебаний давления остается постоянной. Это обстоятельство может быть использовано для оценки характерного времени θ трещиновато-пористого пласта по наблюдениям колебаний давления при периодическом возбуждении скважины.

Движение в слоистых пластах. Близкие по характеру задачи возникают при исследовании фильтрации в слоистых пластах. Например, если движение происходит в двух лежащих друг над другом пластах, отделенных слабопроницаемой перемычкой, то давление в каждом из них следует уравнению упругого режима, в правую часть которого входит интенсивность перетока между пластами. Эту интенсивность в большинстве случаев можно считать пропорциональной разности давлений в соответственных точках пластов. Сходство возникающей задачи с задачей фильтрации в «двойной» пористой среде очевидно.

Из всего разнообразия задач этого цикла мы рассмотрим здесь лишь одну — задачу об истощении пласта, граничащего с пластом

большой мощности, но малой проницаемости. Она представляет большой интерес в связи с оценкой запасов нефти и газа некоторых месторождений.

Предположим, что область фильтрации имеет вид, приведенный на рис. 35. Допустим, что пласты *I* и *II* сложены породами одинаковой пористости, но существенно различной проницаемости, так что $kh \gg k_1 H$, хотя $H \gg h$.

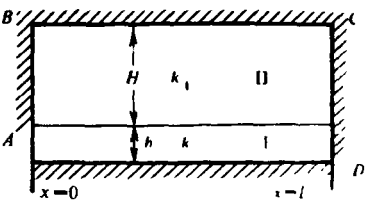


РИС. 35. Схема слоисто-неоднородного пласта.
Слои: *I* — высокопроницаемый; *II* — малопроницаемый

Будем рассматривать истощение системы, предполагая, что вначале она находилась под давлением P_0, а с момента $t = 0$ начинается отбор жидкости через нижний пласт в сечении $x = 0$, причем давление на всей линии $x = 0$ одинаково, а отбор жидкости Q сохраняется постоянным. Система считается замкнутой, т. е. границы AB, BC и CD непроницаемы. При этом задача сводится к решению совокупности уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) \quad (-h \leqslant y \leqslant 0),$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa_1 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) \quad (0 \leqslant y \leqslant H,\ 0 \leqslant x \leqslant L) \qquad \text{(III.121)}$$

при условиях

$$k_1 \frac{\partial p}{\partial y}\Big|_{y=+0} = \left(k \frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=-0}, \quad p|_{y=+0} = p|_{y=-0} \qquad \text{(III.122)}$$

$$\frac{\partial p(0, y, t)}{\partial y} = 0, \quad k \int_{-h}^{0} \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=0} dy = Q; \quad \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad y > 0. \qquad \text{(III.123)}$$

При сделанных предположениях (тонком нижнем и слабопроницаемом верхнем пластах) постановку задачи можно упростить.

Заметим, что в силу равенства граничных значений давления в обоих пластах при $y = 0$ производные по x от давления в этих пластах — одного порядка, а следовательно, скорость фильтрации в направлении оси x в верхнем пласте пренебрежимо мала (по условию $k_1 H \ll kh$). Вместе с тем скорости фильтрации в направлении оси y совпадают при $y = 0$, что может быть только в случае, если изменение давления в направлении этой оси в верхнем пласте происходит быстрее, чем в нижнем. Отсюда следует, что

$$\partial^2 p/\partial y^2 \gg \partial^2 p/\partial x^2, \quad y > 0.$$

Поэтому второе уравнение системы (III.121) можно записать в виде:

$$\partial p/\partial t = \varkappa_1 \partial^2 p/\partial y^2, \quad y > 0. \qquad \text{(III.124)}$$

Первое уравнение, относящееся к нижнему пласту, можно осреднить по мощности. Имеем

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\varkappa}{h}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=-0} = \varkappa \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\varkappa k_1}{hk}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=+0},$$

$$P = \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} p\,dy. \qquad \text{(III.125)}$$

Наконец, заменим условие $p|_{y=+0} = p|_{y=-0}$ на $p|_{y=+0} = P$. Совершаемая при этом ошибка мала при малой толщине h нижнего пласта. В результате возникает следующая упрощенная задача:

$$\partial p/\partial t = \varkappa_1 \partial^2 p/\partial y^2 \quad (p = p(x, y, t), \quad y > 0),$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\varkappa k_1}{hk}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=+0} \quad [P = P(x, t)], \qquad \text{(III.126)}$$

$$p(x, y, 0) = P(x, 0) = P_0, \quad p(x, 0, t) = P(x, t), \qquad \text{(III.127)}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{y=H} = 0, \quad \left.\frac{kh}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=0} = Q = \text{const}, \quad \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=L} = 0. \qquad \text{(III.128)}$$

Решение этой задачи легко получить операционным методом. Не приводя его полностью, выпишем формулу для изображения от давления на галерее $p_0 = P(0, t)$.

Имеем

$$\bar{p}_0 = \frac{P_0}{\sigma} - \frac{q \operatorname{cth} L\zeta}{\sigma\zeta}, \quad \zeta = \left[\frac{\sigma}{\varkappa} + \frac{k_1}{kh}\sqrt{\frac{\sigma}{\varkappa_1}}\,th\left(H\sqrt{\frac{\sigma}{\varkappa_1}}\right)\right]^{1/2}. \qquad \text{(III.129)}$$

Отсюда легко получить несколько простых выражений, отвечающих различным временам с момента пуска галереи.

Пусть прежде всего время t настолько мало, что возмущение, возникающее на галерее, не достигло непроницаемых границ системы; $t \ll L^2/\varkappa \ll H^2/\varkappa_1$. При этом в (III.129) можно ограничиться асимптотикой $\sigma \gg \varkappa L^{-2} \gg \varkappa_1 H^{-2}$. Для таких значений σ гиперболические тангенс и котангенс можно заменить их предельными значениями при $\sigma \to \infty$, равными единице.

Учитывая, что в данном случае $k_1\varkappa/kh\sqrt{\sigma\varkappa_1} \ll 1$, имеем

$$p_0 \approx \frac{P_0}{\sigma} = \frac{q\sqrt{\varkappa}}{\sigma}\left(\sigma + \frac{k_1\varkappa}{kh}\sqrt{\frac{\sigma}{\varkappa_1}}\right)^{-1/2} \approx \frac{P_0}{\sigma} -$$

$$- \frac{q\varkappa^{1/2}}{\sigma^{3/2}} \cdot \left(1 - \frac{k_1\varkappa}{2kh\sqrt{\sigma\varkappa_1}} + \ldots\right), \qquad \text{(III.130)}$$

следовательно,

$$p_0(t) = P_0 + 2\sqrt{\frac{\varkappa t}{\pi}}\,q + \frac{k_1\varkappa}{2kh}\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa_1}}\,qt + \ldots \qquad \text{(III.131)}$$

Таким образом, на первой стадии движения влияние верхнего слабопроницаемого пласта сказывается лишь в добавлении малых членов, порядка $t^{1/2}$ по сравнению с главными.

Аналогичным сбразом для промежуточного диапазона времен, $L^2/\varkappa \ll t \ll H^2/\varkappa_1$ из (III.129) получаем

$$\bar{p} = \frac{P_0}{\sigma} - \frac{q\varkappa}{L\sigma}\left(\sigma + \frac{k_1\varkappa}{kh}\sqrt{\frac{\sigma}{\varkappa_1}}\right)^{-1},$$

$$p_0(t) = P_0 - \varkappa t q/L \ \ldots, \quad (k_1(\varkappa t)^{1/2}/kh \ll 1), \tag{III.132}$$

$$p_0(t) = P_0 - \frac{\varkappa q}{L}\left[\frac{2kh}{\varkappa k_1}\sqrt{\frac{t\varkappa_1}{\pi}} - \frac{\varkappa_1 k^2 h^2}{k_1^2 \varkappa^2}\right], \quad (k_1(\varkappa t)^{1/2}/kh \gg 1). \tag{III.133}$$

Первое из выражений (III.133) отвечает движению в высокопроницаемом пласте в пренебрежении притоком из малопроницаемого; согласно второму изменение давления определяется в основном притоком из верхнего пласта. Наконец, при еще больших временах, $t \gg H^2/\varkappa_1$, начинается вторая фаза фильтрации в верхнем пласте (истощение верхнего пласта).

При этом

$$p_0(t) = P_0 - \frac{Qt}{L}\left(\frac{mh}{K} + \frac{m_1 H}{K_1}\right)^{-1}. \tag{III.134}$$

Таким образом, для двуслойного пласта рассматриваемого вида отчетливо выделяются два периода движения при эксплуатации на истощение. На протяжении первого периода истощается первый пласт, а движение в малопроницаемом верхнем пласте незначительно, на второй стадии нижний пласт практически полностью истощен, и происходит истощение верхнего пласта.

Если по данным о падении давления по мере отбора на первой стадии подсчитать запасы жидкости или газа в пласте, то получим лишь запасы в нижнем пласте $V_0 = mhbL$, что значительно меньше истинных запасов $V = (mh + m_1 H)\, bL$. Это обстоятельство оказывается существенным для ряда месторождений.

ГЛАВА 4 ДВУХФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ И ТЕОРИЯ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ

§ 1. Основные представления теории двухфазного течения в пористых средах

Распределение фаз в поровом пространстве. Капиллярное давление. Формирование залежей происходит путем оттеснения из пластов-коллекторов первоначально находившейся там воды. Поэтому вместе с нефтью и газом в коллекторах всегда содержится некоторое количество (обычно 10—30 %, иногда до 70 % порового объема) так называемой погребенной воды. Кроме того, многие продуктивные пласты заполнены нефтью и газом лишь в верхней, купольной зоне, а нижележащие зоны заполнены краевой водой. Самые верхние части нефтяных залежей содержат газ, образующий так называемые газовые шапки. Таким образом, даже в ненарушенном состоянии в природных пластах может находиться несколько отдельных подвижных фаз. Двух- или трехфазное течение возникает практически во всех случаях разработки нефтяных месторождений, поскольку движущие нефть силы возникают вследствие упругости или гидравлического напора газа или воды.

В данной книге рассматривается наиболее простое двухфазное течение, соответствующее вытеснению жидкости, первоначально заполнявшей поры, другой жидкостью, не смешивающейся с первой и образующей отдельную фазу. Говоря более конкретно, речь будет идти в основном о вытеснении нефти из пласта водой или газом.

Введем основные характеристики многофазного течения — насыщенность и скорость фильтрации. Доля объема пор в элементарном макрообъеме, охватывающем данную произвольную точку, занятого i-й фазой, называется насыщенностью порового пространства этой фазой в данной точке и обозначается s_i. Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = 1, \tag{IV.1}$$

где n — число отдельных фаз. Таким образом, в системе n фаз имеется $n-1$ независимая насыщенность. В частности, при исследовании фильтрации двухфазной жидкости достаточно рассматривать лишь одну насыщенность.

Движение каждой из фаз можно охарактеризовать вектором скорости фильтрации данной фазы $\boldsymbol{u}_i$. Аналогично скорости фильтрации однофазной жидкости $\boldsymbol{u}_i$ определяется как вектор, проекция которого на некоторое направление равна объемному потоку i-й

фазы через единичную площадку, перпендикулярную к данному направлению. Следует помнить, что эта площадка пересекает как твердую фазу, так и другие подвижные фазы.

Граница двух фаз в пористой среде разбивается на множество искривленных участков, радиус кривизны которых сопоставим с размером пор. Как известно, на межфазной границе возникает капиллярный скачок давления, определяемый по формуле Лапласа

$$p_c = \alpha (1/R_1 + 1/R_2), \qquad \text{(IV.2)}$$

где α — межфазное натяжение; R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности раздела фаз в данной точке, близкие размерам пор.

Как отмечалось в § 2 гл. I, характерный размер поровых каналов имеет порядок $\sqrt{k/m}$, т. е. при обычной для песчаников проницаемости (10^{-13} м^2) он составляет 5—10 мкм. Межфазное натяжение на границе большинства углеводородных жидкостей и газов с водой находится в пределах 0,03—0,05 Н/м. Это означает, что капиллярное давление на границе углеводородов с водой составляет $\sim$10 кПа.

Вследствие хаотической искривленности межфазной границы в порах при двухфазном течении возможно образование изолированных частиц каждой фазы. Представим себе изолированную каплю одной из фаз размером порядка характерного размера пор, окруженную другой фазой и твердым скелетом. При продвижении этой капли в порах радиус кривизны ее поверхности должен изменяться от минимального до максимального радиуса пор, т. е. примерно на $\sqrt{k/m}$. Тот же порядок будет иметь и разность радиусов кривизны переднего и заднего фронта капли при движении. Это означает, что для проталкивания капли через пористую среду перепад давления на ней должен составлять величину, близкую к капиллярному давлению. Если и длина капли имеет порядок размера пор r, то для ее перемещения потребуется приложить градиент давления p_c/r, т. е. порядка десятков и сотен МПа/м, что намного превышает существующие и возможные градиенты давления, возникающие в результате практически всех естественных и искусственных процессов. Отсюда следует, что подвижна почти всегда только связная часть каждой из фаз, насыщающих поровое пространство.

Таким образом, капиллярные силы способны создать в пористой среде градиенты давления, намного превышающие градиенты, создаваемые внешними воздействиями. Поэтому именно капиллярные силы полностью определяют распределение фаз в порах. Капиллярное давление, согласно (IV.2) пропорциональное кривизне межфазной границы, зависит от структуры порового пространства и от преимущественной смачиваемости скелета пористой среды каждой из фаз.

Для каждой фазы, имеющей связную часть, можно ввести фазовое давление в точке p_i, понимаемое как осредненное по

элементарному макрообъему давление в связной части фазы. То, что в отдельных изолированных каплях давление может значительно отличаться от среднего, никак не будет сказываться на движении. Долю объема порового пространства в окрестности данной точки, занятую связной частью фазы, в дальнейшем будем называть активной насыщенностью, долю несвязной части — пассивной насыщенностью.

На распределение фаз в порах, кроме поверхностного натяжения, значительное влияние оказывают преимущественная смачиваемость скелета породы одной из фаз и угол смачивания. Давление в менее смачивающей среду фазе будет выше на значение капиллярного давления.

Капиллярное равновесие в пористой среде. Прежде чем перейти к выводу уравнений фильтрации двухфазной жидкости, рассмотрим условия равновесия двух несмешивающихся жидкостей разной плотности под действием гравитационных и капиллярных сил. Гидростатическое равновесие двухфазной системы в образце пористой среды устанавливается в основном двумя путями: во-первых, вследствие впитывания более смачивающей жидкости (например, впитывание воды в сухой, т. е. насыщенный воздухом, вертикально расположенный образец пористой среды) и, во-вторых, путем дренирования образца, когда менее смачивающая фаза вытесняет более смачивающую. Последнее происходит, например, при вытеснении (оттеснении) воды газом сверху из первоначально водонасыщенного образца.

Рассмотрим элемент пористой среды, в котором две жидкости находятся в состоянии равновесия под действием капиллярных сил и силы тяжести. В связной части каждой из фаз введем давления p_1 и p_2 (индекс 1 относится к более смачивающей фазе). Условия равновесия для элемента длиной dz имеют вид

$$dp_1/dz = \rho_1 g; \quad dp_2/dz = \rho_2 g; \quad d(p_2 - p_1)/dz = (\rho_1 - \rho_2) g. \qquad \text{(IV.3)}$$

Разность давлений в фазах равна капиллярному давлению в данном сечении. Поэтому из (IV.3) следует

$$dP_c/dz = (\rho_1 - \rho_2) g. \qquad \text{(IV.4)}$$

Изменение капиллярного давления с высотой происходит вследствие уменьшения или увеличения насыщенности. Более смачивающая фаза имеет тенденцию преимущественно заполнять более мелкие поры, поэтому с ростом ее насыщенности радиус кривизны границы раздела фаз должен увеличиваться. Предположим для определенности, что смачивающая фаза обладает большей плотностью, как это чаще всего бывает в условиях вытеснения нефти водой [1]. Тогда в состоянии гидростатического равновесия водонасыщенность будет постепенно уменьшаться с высотой. В силу микронеоднородности пористой среды вода при впитывании поднима-

[1] Основным минералом большинства песчаных коллекторов нефти и газа является кварц, который лучше смачивается водой, чем нефтью или газом, т. е. гидрофилен. Гидрофильны чаще всего и карбонатные породы.

ется выше, а при дренировании удерживается на более высоком уровне в системах поровых каналов малого диаметра по сравнению с каналами большего диаметра. Эта тенденция осложняется поперечными перетоками между каналами разного диаметра. В поперечном (горизонтальном) направлении равновесное распределение фаз по системам поровых каналов полностью определяется капиллярными силами.

Соотношение (IV.4) может интерпретироваться как связь капиллярного давления с насыщенностью в дифференциальной форме. Из распределения насыщенности с высотой может быть получена зависимость капиллярного давления от насыщенности

$$s = s(z), \quad P_c(s) = (\rho_1 - \rho_2)\, gz. \qquad \text{(IV.5)}$$

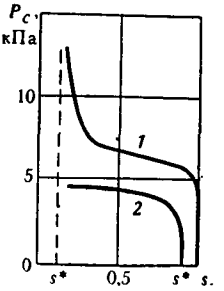


РИС. 36. Кривые капиллярного давления (насыпная среда проницаемостью 7 мк/м²):
1 — вытеснение; *2* — пропитка

Кривые $P_c(s)$, называемые кривыми капиллярного давления, представляют собой широко употребляемую интегральную характеристику структуры и микронеоднородности порового пространства. Вид связи $P_c(s)$ зависит от направления изменения насыщенности, т. е. существует так называемый капиллярный гистерезис. Кривые $P_c(s)$, соответствующие увеличению насыщенности более смачивающей фазой s, называются кривыми пропитки, а соответствующие уменьшению s — кривыми дренирования (рис. 36).

Кривые капиллярного давления, построенные по данным установления гидростатического равновесия, на практике почти не используют. Чаще всего их получают при медленном равновесном вытеснении более смачивающей фазы (воды или углеводородной жидкости) менее смачивающей (газом). Подробное описание методов получения кривых капиллярного давления можно найти в руководствах по физике нефтяного пласта.

Кривые капиллярного давления, отвечающие дренированию, используются для оценки распределения насыщенности в так называемых переходных зонах на границе нефть — вода, газ — вода или газ — нефть в нефтяных и газовых месторождениях до начала разработки. Это распределение непосредственно описывается формулой (IV.5).

Кривые капиллярного давления можно построить для различных пар жидкостей и газов, отличающихся межфазным натяжением и краевыми углами смачивания на данной породе. Чтобы получить функции насыщенности, характеризующие только структуру порового пространства, следует привести функцию капиллярного давления к безразмерному виду:

$$P_c = 2\alpha \sqrt{m} J(s, \Theta)/\sqrt{k}, \qquad \text{(IV.6)}$$

где Θ — краевой угол смачивания. Формула (IV.6) получена по аналогии с выражением для капиллярного давления в одиночном цилиндрическом капилляре радиуса r: $P_c = 2\alpha \cos\Theta/r$. В случае

пористой среды ввиду хаотического расположения стенок поровых каналов зависимость капиллярного давления от Θ не может быть выражена единой формулой. Тем не менее, по аналогии с круговым цилиндрическим капилляром Леверетт предложил записывать безразмерное выражение для капиллярного давления в виде

$$P_c = \alpha \sqrt{m} \cos \Theta_0 J(s)/\sqrt{k}. \qquad \text{(IV.7)}$$

Выражение (IV.7) означает, что кривые капиллярного давления считаются геометрически подобными при использовании различных пар жидкостей в одной и той же пористой среде. Угол Θ_0 в этом случае играет роль интегральной характеристики смачиваемости в системе пористая среда — жидкость. Функцию $J(s)$ принято называть функцией Леверетта. Эти функции для разных типов пород-коллекторов нефти и газа систематизированы, например, в работах В. А. Иванова и др. [22].

Кривые капиллярного давления определены не для всех значений s, поскольку при дренировании образца пористой среды вытеснение более смачивающей фазы никогда не бывает полным. Остаточная часть фазы находится в виде изолированных целиков в самых мелких порах или вблизи контактов между зернами. Небольшие изолированные целики, капли или пузырьки не могут быть вытеснены другой фазой при реально существующих градиентах давления. Поэтому в процессах как дренирования, так и пропитки существует некоторая насыщенность вытесняемой фазой s_* (так называемая неснижаемая насыщенность), которая не уменьшается с ростом выталкивающего перепада давления. Если насыщенность меньше неснижаемой, капиллярное давление оказывается неопределенным, поскольку остаточная фаза состоит из отдельных не связанных между собой капель. Заметим также, что и при насыщенности больше неснижаемой часть вытесняемой фазы также находится в виде изолированных капель.

Когда насыщенность более смачивающей фазой приближается к неснижаемой, капиллярное давление быстро возрастает и на экспериментальных кривых капиллярного давления часто изображается неограниченный рост P_c при $s \to s_*$. Физически более оправдано полагать, что при $s \to s_*$ капиллярное давление и функция Леверетта стремятся к конечным величинам, определяемым радиусом кривизны капель, составляющих пассивную насыщенность остаточной смачивающей фазы.

Обобщенный закон Дарси для двухфазного течения. Теория фильтрации двухфазной жидкости во многом аналогична теории капиллярно-гравитационного равновесия. Как и в случае капиллярно-гравитационного равновесия, системы пор, занимаемые подвижной частью каждой фазы, следует представлять себе в виде каналов, протяженность которых в направлении движения намного больше, чем их размеры поперек потока.

Поэтому в первом приближении можно принять, что каждая подвижная фаза течет в занимаемом ею пространстве под действием «своего» давления, т. е. так, как если бы она была ограниче-

на только твердыми стенками. Поскольку сопротивление движению каждой фазы определяется только геометрией занимаемой ею части порового пространства, то закон фильтрации каждой из жидкостей двухфазной системы по Маскету и Леверетту можно записать в виде

$$\boldsymbol{u}_i = -(kf_i/\mu_i)\operatorname{grad} p_i, \quad i = 1, 2, \tag{IV.8}$$

где f_i — безразмерные величины, называемые относительными фазовыми проницаемостями.

Пусть совместное течение двух фаз медленное, так что изменение насыщенности происходит квазиравновесным образом. Силы вязкого сопротивления можно рассматривать как распределенные массовые силы, пропорциональные скорости фильтрации. В одномерном случае из уравнений (IV.8) можно получить выражение, аналогичное по форме (IV.3):

$$\partial(p_2 - p_1)/\partial x = U_1 - U_2; \quad U_i = \mu_i u_i / k f_i. \tag{IV.9}$$

При выводе выражения (IV.4) неявно предполагалось, что $P_c(S)$ — характеристика, зависящая от структуры порового пространства и поверхностных сил взаимодействия жидкостей между собой и с твердым скелетом, но не от гравитационных (массовых) сил. Это предположение подтверждается определениями кривых капиллярного давления с использованием различных жидкостей и путем центрифугирования [23]. Рассуждая по аналогии, можно применить тот же вывод к распределению фаз в порах при медленной квазиравновесной совместной фильтрации, т. е. принять, что при данной насыщенности жидкости распределены так же, как и в условиях гидростатического равновесия. Это означает, во-первых, что разность давлений в фазах p_2—p_1 может быть принята равной капиллярному давлению $P_c(s)$ и зависящей только от насыщенности:

$$p_2 - p_1 = P_c(s) = \alpha \sqrt{m} J(s)/\sqrt{k}. \tag{IV.10}$$

Во-вторых, как уже отмечалось, капиллярные силы в поровых каналах существенно преобладают над внешним перепадом давления и определяют распределение фаз в порах. Поэтому можно допустить, что каждая из фаз движется по «своей» системе поровых каналов, ограниченных твердым скелетом и другой фазой. Таким образом, при данной насыщенности гидравлические сопротивления, а следовательно, и проницаемость для каждой из фаз оказываются однозначно определенными.

Эксперименты показали [27, 48], что в широком диапазоне условий совместного течения и вытеснения двух фаз в пористых средах относительные проницаемости не зависят от скорости фильтрации и отношения вязкостей движущихся фаз. Это можно объяснить тем, что поверхность соприкосновения (и сила взаимодействия) каждой из фаз с твердым скелетом намного больше, чем с другой фазой. В некоторых исключительных случаях взаимодействие подвижных фаз все же проявляется. Например, иногда

маловязкая вытесняемая фаза кратковременно образует для высоковязкой вытесняющей жидкости на поверхности скелета слой «смазки» и относительная проницаемость для вытесняющей фазы возрастает до значений, больших единицы. Но такой слой смазки, по-видимому, неустойчив и существует недолго.

В дальнейшем изложении, если не оговорено противное, относительные проницаемости и функция Леверетта считаются однозначными функциями насыщенности, не зависящими от отношения вязкостей.

Типичный вид функций относительной проницаемости для более смачивающей фазы $f_1(s)$, (s — ее насыщенность) и для менее смачивающей фазы $f_2(s)$ показан на рис. 37. Эти кривые получены при стационарном совместном течении воды и нефти на малых образцах песчаника.

Характерная несимметричная форма кривых относительной проницаемости объясняется тем, что при одной и той же насыщенности более смачивающая фаза занимает преимущественно мелкие поры и относительная проницаемость для нее меньше. При малых насыщенностях часть каждой из фаз находится в несвязном состоянии в виде изолированных мелких капель или целиков и не участвует в движении. Поэтому, начиная с некоторой насыщенности, каждая фаза полностью переходит в несвязное состояние и ее относительная проницаемость становится равной нулю, т. е. $f_1(s) \equiv 0$ при $s < s_*$, $f_2(s) \equiv 0$ при $s > s^* = 1 - \sigma_*$.

Заметим, что хотя речь идет о совместной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей, приходится различать вытесняющую и вытесняемую фазы, т. е. относительные проницаемости, как и кривые капиллярного давления, различны в зависимости от того, какая из фаз (более или менее смачивающая) первоначально заполняла пористую среду, т. е. существует гистерезис относительных проницаемостей, аналогичный гистерезису кривых капиллярного давления. «Неподвижные» насыщенности s_* и σ_* совпадают с «неснижаемыми» насыщенностями на кривых капиллярного давления.

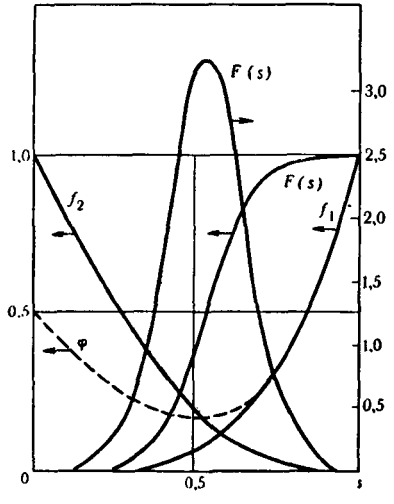


РИС. 37. Типичные кривые относительных проницаемостей:
$F(s)$ — функция Баклея — Леверетта; $F'(s)$ — ее производная ($\mu_0 = 0{,}5$)

Итак, если распределение фаз в порах равновесно, для фильтрации двухфазной жидкости справедливы уравнения Маскета и Леверетта

$$\boldsymbol{u}_i = -(kf_i(s)/\mu_i)\operatorname{grad} p_i, \quad i = 1, 2, \tag{IV.11}$$

$$p_2 - p_1 = P_c(s). \tag{IV.12}$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо записать уравнения сохранения массы для обеих фаз, которые выводятся совершенно аналогично тому, как уравнение неразрывности для однофазного течения (I.16):

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_1 s) - \operatorname{div}(\rho_1 \boldsymbol{u}_1) = 0, \tag{IV.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[m\rho_2(1-s)] - \operatorname{div}(\rho_2 \boldsymbol{u}_2) = 0. \tag{IV.14}$$

Поскольку ρ_1 и ρ_2 — функции давлений p_1 и p_2, а изменение пористости в однородном пласте зависит только от изменения среднего давления $\bar{p} = p_1 s + p_2(1-s)$, уравнения (IV.11) — (IV.14) образуют замкнутую систему для p_i и s.

Если вытесняемая и вытесняющая фазы — слабосжимаемые капельные жидкости, влиянием сжимаемости на распределение насыщенности часто можно пренебречь. Действительно, характерное время нестационарного перераспределения давления за счет сжимаемости составляет $t_1 = L^2/\varkappa$, где $\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности; L — характерный размер. Характерное время вытеснения $t_2 = L/u$, где u — средняя скорость фильтрации. Обычно скорость фильтрации равна около 10^{-3} см/с, L не более 10^4—10^5 см, а $\varkappa \approx 10^4$ см^2/с. Поэтому $t_1/t_2 = uL/\varkappa \approx 10^{-2}$, откуда видно, что нестационарные процессы упругого перераспределения давления заканчиваются в начале вытеснения.

Если жидкости и пористую среду можно считать несжимаемыми, вместо (IV.13) и (IV.14) получаем соотношения

$$m\partial s/\partial t - \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1 = 0; \quad m\partial s/\partial t + \operatorname{div} \boldsymbol{u}_2 = 0. \tag{IV.15}$$

Уравнения (IV.15) замыкают систему уравнений фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости (IV.11) — (IV.12).

Иногда неудобно использовать в уравнениях фильтрации p_1 и p_2, так как давление в каждой из фаз не определено в тех областях, где соответствующая фаза неподвижна или отсутствует. Введение среднего давления в виде $\bar{p} = p_1 s + p_2(1-s)$ может быть удобно для учета сжимаемости скелета пористой среды, но приводит к довольно громоздким соотношениям при общей формулировке задач вытеснения. Для несжимаемых жидкостей оказывается удобным определить среднее давление по формуле

$$P = p_1 F(s) + p_2[1 - F(s)] - \int_s^1 P_c(s) F'(s)\, ds, \tag{IV.16}$$

где $F(s) = f_1(s)/[f_1(s) + \mu_0 f_2(s)]$, $\mu_0 = \mu_1/\mu_2$.

Из (IV.12) и (IV.16) нетрудно получить

$$p_1 = P + \int_s^1 P_c(s) F'(s)\, ds - P_c(s)[1 - F(s)],$$

$$p_2 = P + \int_s^1 P_c(s) F'(s)\, ds + P_c(s) F(s). \tag{IV.17}$$

Отсюда можно получить для суммарной скорости фильтрации обеих фаз $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ выражение

$$\boldsymbol{u} = -(k\varphi(s)/\mu_1)\operatorname{grad} P, \tag{IV.18}$$

где $\varphi(s) = f_1(s) + \mu_0 f_2(s)$.

Выражение (IV.18) может рассматриваться как обобщение закона Дарси для суммарной скорости. Комбинируя соотношения (IV.17) с уравнениями обобщенного закона Дарси и неразрывности, можно получить систему уравнений двухфазной фильтрации, содержащую только неизвестные P и s:

$$\operatorname{div}[\varphi(s)\operatorname{grad} P] = 0, \tag{IV.19}$$

$$\partial s/\partial t - \operatorname{div}[(kf_1(s)/m\mu_1)\operatorname{grad} P] - a^2\Delta\Phi(s) = 0, \tag{IV.20}$$

где

$$\Phi(s) = -\int_0^s J'(s) f_2(s) F(s)\, ds; \quad a^2 = \alpha\sqrt{k}/\mu_1\sqrt{m};$$

Δ — оператор Лапласа.

Ограничения в применимости системы уравнений двухфазной фильтрации в форме (IV.11), (IV.12) и (IV.15) связаны главным образом с действием трех факторов: неоднородности пористой среды, влияния гидродинамических сил на распределение фаз в порах и неравновесности.

Соотношение гидродинамических и капиллярных сил в порах может быть охарактеризовано безразмерным параметром [48]

$$\Pi_c = \sqrt{k}l\,|\operatorname{grad} P|/\alpha\sqrt{m}, \tag{IV.21}$$

где l — характерный размер порового канала, занятого одной фазой. Если в качестве l принять характерный размер пор $\sqrt{k/m}$, то вместо Π_c получим параметр

$$\Pi_c^* = k\,|\operatorname{grad} P|/\alpha m. \tag{IV.22}$$

Последний параметр часто записывается через скорость фильтрации $u = |(k/\mu)\operatorname{grad} P|$ и иногда называется капиллярным числом N_c.

$$N_c = u\mu_1/\alpha. \tag{IV.23}$$

Экспериментальные исследования показывают, что параметр N_c при малых его значениях не влияет на вид кривых относительной проницаемости вплоть до некоторого критического значения N_c^0. Согласно результатам Д. А. Эфроса [48], значение N_c^0 имеет порядок 10^{-5}, т. е. влияние гидродинамических сил сказывается на распределении фаз в порах, когда они на несколько порядков меньше капиллярных. Так как критическое значение N_c крайне мало, есть основания сомневаться в правильности выбора параметра N_c или Π_c^* в виде (IV. 22) или (IV. 23). По всей вероятности, в опытах на довольно крупных образцах, проведенных Д. А. Эфросом и В. П. Оноприенко, характерный размер (диаметр) каналов, занятых каждой

фазой l, намного превосходил размер пор $\sqrt{k/m}$. В результате критическое значение параметра Π_c оказывается намного больше, чем критическое значение Π_c^* или N_c. Характерный размер l определяется, по-видимому, неоднородностью пористой среды и тем больше, чем больше размер рассматриваемой области течения или образца породы («масштабный фактор»). Влияние неоднородности на распределение фаз на макроуровне в связи с этим будет рассмотрено в § 5 данной главы.

В последнее время, в связи с широким применением поверхностно-активных веществ для повышения нефтеотдачи пластов рядом авторов проведены детальные исследования возможности уменьшения остаточной нефтенасыщенности при вытеснении путем снижения поверхностного натяжения на границе нефть — вода. С точки зрения теории двухфазного течения в пористой среде эти исследования сводятся к оценке влияния капиллярного числа N_c на «неподвижную» насыщенность. Эксперименты проводились на малых образцах с высокой степенью однородности и на модельных пористых средах или моделях элементарных пор. Эксперименты показали, что при $N_c<0{,}05$ остаточная насыщенность σ^* (менее смачивающей фазы) не зависит от этого параметра, а при $N_c>0{,}38$ происходит полное вытеснение ($\sigma^*=0$). При значениях скорости фильтрации, вязкости и межфазного натяжения, соответствующих условиям вытеснения нефти водой без применения поверхностно-активных веществ, параметр N_c находится в пределах 10^{-6}—10^{-4}, т. е. влияние N_c на остаточную нефтенасыщенность не должно наблюдаться. Заметим, что во всех экспериментах высокие значения N_c (до 0,1—1,0) достигались путем снижения межфазного натяжения до 10^{-5}—10^{-6} Н/м. Достигнуть высоких значений N_c путем увеличения скорости не удается вследствие нарушения закона Дарси.

Рассмотренное влияние скорости на относительные проницаемости сказывается как в стационарных, так и в нестационарных условиях течения. В нестационарных процессах, кроме того, проявляется влияние неравновесности распределения фаз (см. § 4 данной главы).

Трехфазная фильтрация. В предыдущем изложении мы ограничились только случаем двухфазной фильтрации. В немногочисленных пока исследованиях трехфазной фильтрации закон фильтрации записывается в форме

$$\boldsymbol{u}_i = -(kf_i(s_1,\ s_2)/\mu_i)\operatorname{grad} p_i,\quad i=1,\ 2,\ 3, \tag{IV.24}$$

$$p_i - p_j = P_c^{ij}(s_1,\ s_2),\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3. \tag{IV.25}$$

Исследования относительных проницаемостей в системе трех фаз показали, в частности, что в системе нефть — газ — вода в гидрофильных средах относительная проницаемость для наиболее смачивающей фазы (воды) зависит только от водонасыщенности и не зависит от соотношения двух других фаз.

Уравнения неразрывности в трехфазной системе при условии несжимаемости фаз имеют вид, аналогичный (IV.15):

$$m\,(\partial s_i/\partial t) + \operatorname{div} \boldsymbol{u}_i = 0. \qquad \text{(IV.26)}$$

§ 2. Структура двухфазного течения при крупномасштабном описании. Задача Баклея-Леверетта

На вытеснении нефти водой или газом основана технология ее извлечения из недр при разработке нефтяных месторождений. Это либо вторжение в пласт краевой воды или газа газовой шапки, продвигающих нефть к забоям добывающих скважин (естественный напорный режим), либо закачка вытесняющей жидкости или газа через систему нагнетательных скважин для поддержания давления в пласте и продвижения нефти к добывающим скважинам. Рассмотрим задачу о вытеснении нефти водой или газом (более широко — задачу о вытеснении одной несмешивающейся жидкости другой) на основе уравнений двухфазной фильтрации, полученных в предыдущем параграфе. Для решения системы уравнений (IV.11)—(IV.15) широко применяется аппарат численных методов. Основываясь на общих принципах, изложенных в гл. I, ограничимся только исследованием общих свойств поля насыщенности, для чего применим асимптотический подход, основанный на малости некоторых безразмерных параметров, входящих в условия задачи о вытеснении несмешивающихся жидкостей [5].

Уравнения Баклея—Леверетта. Общая теория. Запишем основную систему уравнений для давления и насыщенности в виде (IV.19) и (IV.20), используя безразмерные переменные

$$X = x/L, \quad Y = y/L, \quad Z = z/L, \quad \tau = k\Delta p t/m\mu_1 L = u_0 t/mL, \quad P_i = p_i/\Delta p, \quad \Pi = P/\Delta p, \quad \varepsilon = a^2/u_0 L = \alpha \cos\Theta \sqrt{k}/\sqrt{m}\Delta p.$$

Здесь L — характерный размер (например, расстояние между скважинами или галереями); u_0 — характерная скорость, связанная с характерным перепадом давления Δp. Получим

$$\operatorname{div}[\varphi(s) \operatorname{grad} \Pi] = 0, \qquad \text{(IV.27)}$$

$$\partial s/\partial t - \operatorname{div}[f_1(s) \operatorname{grad} \Pi] - \varepsilon \Delta \Phi(s) = 0, \qquad \text{(IV.28)}$$

где Δ — оператор Лапласа.

В задачах нефтяной подземной гидродинамики перепад давления на границах области течения, размер которой достигает сотен метров, составляет несколько десятых или единиц мегапаскалей, скорость фильтрации 10^{-6}—10^{-5} м/с, капиллярное давление в нефтяных пластах равно 10^{-4}—10^{-2} МПа, а параметр $a^2 \sim 10^{-8}$—10^{-6} м^2/с. Отсюда следует, что параметр ε в уравнении (IV.28) порядка 10^{-2}—10^{-4}, поэтому в крупномасштабном приближении

членом, содержащим ε, можно пренебречь, т. е. записать вместо (IV.28)

$$\partial s/\partial t - \operatorname{div}[f_1(s)\operatorname{grad}\Pi] = 0. \qquad \text{(IV.29)}$$

Чтобы исследовать общие свойства поля насыщенности на основ уравнений (IV.27) и (IV.29), последние удобнее переписать в размерном виде

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0; \quad \boldsymbol{u} = -(k\varphi(s)/\mu_1)\operatorname{grad} p, \qquad \text{(IV.30)}$$

$$m\partial s/\partial t + F'(s)(\boldsymbol{u}\operatorname{grad} s) = 0, \qquad \text{(IV.31)}$$

где $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ — суммарная скорость фильтрации обеих фаз. Система уравнений (IV.27) и (IV.29) эллиптического типа относительно давления и гиперболического — относительно насыщенности. Для уравнения (IV.31) можно получить семейство характеристик, на котором выполняются соотношения

$$dx/dt = uF'(s)/m, \quad dy/dt = vF'(s)/m, \qquad \text{(IV.32)}$$

$$dz/dt = wF'(s)/m, \; ds/dt = 0.$$

Соотношения (IV.32) при заданном мгновенном поле скоростей можно рассматривать как уравнения распространения точек с постоянной насыщенностью. Рассмотрим поверхность Г с постоянным на ней значением насыщенности s (так называемую изосату), уравнение которой $\psi(x, y, z, t) = 0$. Тогда из (IV.32) следует

$$V_n = (\partial\psi/\partial t)(\partial\psi/\partial n) = u_n F'(s)/m, \qquad \text{(IV.33)}$$

где V_n — скорость перемещения изосаты по нормали к ней; u_n — проекция суммарной скорости фильтрации на нормаль к изосате.

В задаче о вытеснении несмешивающихся жидкостей в системе скважин или галерей граничными условиями для уравнений (IV. 30) и (IV. 31) являются, во-первых, обычные условия для давления, задаваемые на скважинах или галереях при движении несжимаемых жидкостей (см. гл. II), и, во-вторых, условия для насыщенности на нагнетательных скважинах или галереях. Когда нагнетается чистая вытесняющая фаза, насыщенность на контурах нагнетания должна, очевидно равняться максимальной s^*. Кроме того, для насыщенности должно быть задано начальное распределение $s(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$.

Уравнения (IV.32) означают, что при заданной скорости фильтрации скорость распространения насыщенности s пропорциональна производной функции Баклея — Леверетта $F'(s)$. Типичные кривые относительной проницаемости как для смачивающей, так и для несмачивающей фазы вогнуты к оси s, вследствие чего функция $F(s)$, равная тождественно нулю при $s \leqslant s_*$ и единице при $s \geqslant s^*$, имеет точку перегиба, а функция $F'(s)$ — максимум (см. рис. 37). Поэтому в соответствии с формулами (IV.32) бо́льшие значения насыщенности вытесняющей фазой s (на рис. 38 слева) могут «обгонять» меньшие (на рис. 38, начиная с $T = 0{,}5$), вследствие чего появляются поверхности разрыва (скачки), при переходе через которые насыщенность меняется на конечную величину.

Появление скачков насыщенности связано с пренебрежением членом со старшей производной в уравнении (IV.28). Скачками насыщенности аппроксимируются области, внутри которых велик $|\operatorname{grad} s|$, и поэтому нельзя пренебрегать последним членом уравнения (IV.28). При точном решении (IV.28) вместо скачков возникают узкие области с быстро меняющейся насыщенностью. Асимптотическому исследованию распределения насыщенности в этих зонах посвящен следующий параграф.

Прежде чем исследовать формирование и эволюцию скачков насыщенности, выведем соотношения, выражающие условия сохранения массы и давления на них.

Пусть скачок насыщенности проходит через цилиндрический элемент пористой среды объемом Ω, вырезанный по нормали к поверхности скачка и ограниченный участками поверхностей Σ, параллельных поверхности скачка, находящихся на расстоянии Δn от нее. Условие сохранения массы первой фазы в элементе имеет вид

$$d\left(\int_{\Omega} msd\omega\right)/dt + \int_{\Sigma} u_{1n}d\sigma = 0. \qquad \text{(IV.34)}$$

Далее

$$d\left(\int_{\Omega} msd\omega\right)/dt = mV_{nc}(s^- - s^+)\sum + 0\,(\Sigma/R^2), \qquad \text{(IV.35)}$$

где s^-, s^+ — соответственно насыщенности за и до скачка; R — радиус кривизны поверхности скачка; V_{nc} — скорость перемещения скачка по нормали к нему. Разность потоков вытесняющей жидкости через сечения, параллельные поверхности скачка, равна $(u_{1n}^- - u_{1n}^+)\sum$, где, u_{1n}^- — проекция скорости фильтрации первой фазы на нормаль к поверхности скачка. Поток, связанный с касательной составляющей, исчезающе мал при стремлении Δn к нулю. Тогда условие сохранения массы первой жидкости при стягивании элемента Ω к участку поверхности примет вид

$$V_{nc} = (u_{1n}^- - u_{1n}^+)/m\,(s^- - s^+). \qquad \text{(IV.36)}$$

Условие сохранения массы второй жидкости с учетом (IV.36) сводится к условию непрерывности нормальной составляющей суммарной скорости фильтрации при переходе через поверхность разрыва:

$$u_{1n} + u_{2n} = u_n^- = u_n^+ = u_n.$$

Из (IV.30) и (IV.17) нетрудно получить

$$u_1 = F(s)\,u,\quad u_2 = (1 - F(s))\,u. \qquad \text{(IV.37)}$$

Эти формулы показывают, что по физическому смыслу функция Баклея — Леверетта $F(s)$ выражает долю первой фазы в потоке (при пренебрежении капиллярными силами). Подставляя их в (IV.36), имеем

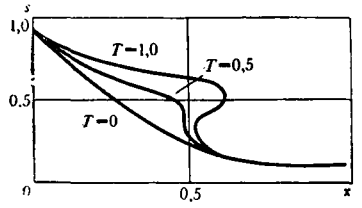


РИС. 38. К формированию неоднозначного распределения насыщенности к задаче Баклея — Леверетта

$$V_{nc} = [F(s^-) - F(s^+)]\, u_n/m\,(s^- - s^+). \qquad \text{(IV.38)}$$

Кроме условий (IV.36) на скачке должно выполняться условие непрерывности давления, которое сводится к следующим соотношениям:

$$(\partial p/\partial \vartheta)^- = (\partial p/\partial \vartheta)^+; \quad u_\vartheta^-/u_\vartheta^+ = \varphi(s^+)/\varphi(s^-), \qquad \text{(IV.39)}$$

где ϑ — направление по касательной к поверхности скачка; u_ϑ — проекция скорости фильтрации на это направление. Различие касательных и сохранение нормальных компонент скорости фильтрации приводит к излому линий тока при переходе через скачок.

Рассмотрим подробнее возникновение и распространение скачка в одномерном случае, когда вместо уравнений (IV. 30) и (IV. 31) имеем

$$m\partial s/\partial t + uF'(s)\,\partial s/\partial x = 0;\ u = u(t). \qquad \text{(IV.40)}$$

Пусть начальное распределение насыщенности монотонно $s_0'(x) \leqslant 0$. Из (IV.32) получим решение уравнения (IV.40) в виде

$$x = x_0(s) + UF'(s)/m;\ \ U = \int_0^t u(\tau)\,d\tau. \qquad \text{(IV.41)}$$

Поскольку функция $F'(s)$ имеет максимум, формальное решение (IV.41) при достаточно больших временах становится неоднозначным, фактически же в момент t_*, когда касательная к кривой $s(x, t_*)$, определяемой формулой (IV.41), становится вертикальной, возникает скачок насыщенности. Из формулы (IV.41), записанной для насыщенности на скачке $s^- = s_c$, получим, дифференцируя по t:

$$dx_c/dt = [uF'(s_c)]/m + [UF''(s_c) + x_0'(s_c)]\, ds_c/dt. \qquad \text{(IV.42)}$$

Далее, приравнивая (IV.42) выражению для скорости скачка (IV.38), получим дифференциальное уравнение для насыщенности на скачке s_c:

$$ds_c/dt = u\,[F(s_c) - F(s_0) - F'(s_c)\,(s_c - s_0)]/\,(s_c - s_0)\,[UF''(s_c) + mx_0'(s_c)]. \qquad \text{(IV.43)}$$

Чтобы определить значение $s_0 = s^+$, входящее в уравнение (IV.43), нужно использовать условие $x(s_c) = x(s_0)$ или

$$UF'(s_c) + mx_0(s_c) = UF'(s_0) + mx_0(s_0). \qquad \text{(IV.44)}$$

Из уравнения (IV.43) следует, что если насыщенность на скачке при его распространении остается неизменной, то она должна удовлетворять соотношению

$$F'(s_c) = [F(s_c) - F(s_0)]\,/\,(s_c - s_0), \qquad \text{(IV.45)}$$

впервые полученному Баклеем и Левереттом. Оно означает, что скорость распространения стационарного скачка равна скорости распространения насыщенности на скачке — см. (IV.33) и (IV.38). Уравнение (IV.43) для $s_c = s^-$ получено С. Н. Бузиновым И. А. Чарным.

Условие (IV.45) допускает простую геометрическую интерпретацию на плоскости переменных F, s: значение s_c находится как точка

касания прямой AB, проведенной из точки $s = s_0$, к кривой $F(s)$ (рис. 39). При этом тангенс угла наклона прямой AB к оси s пропорционален скорости скачка.

Если начальная насыщенность s_0 постоянна, а во входном сечении $x = 0$ выполняется условие $s(0, t) = s^*$, то распределение насыщенности описывается классическим решением Баклея — Леверетта

$$x = UF'(s)/m, \quad (s^* > s > s_c), \quad x = UF'(s_c)/m, \quad (s_0 < s < s_c),$$
$$s = s_0 \text{ при } mx/U > F'(s_c), \qquad \text{(IV.46)}$$

в котором насыщенность на скачке постоянна и удовлетворяет условию (IV.45) при $s_0 = \text{const}$ (рис. 40).

Выше рассмотрены задачи о вытеснении для плоскопараллельного одномерного течения. Однако нетрудно показать, что решения (IV.41) и (IV.46) описывают также плоско-радиальное и сферически-радиальное течение лишь с заменой координаты x на $r^2/2$ и $r^3/3$ соответственно. Для стационарного цилиндрического или сферического скачка остается справедливым и условие Баклея — Леверетта (IV.45)

Для общего пространственного движения выражение (IV.38) можно использовать для описания эволюции поверхности скачка $\psi_c(x, y, z, t)$, поскольку

$$V_{nc} = (\partial\psi_c/\partial t)/(\partial\psi_c/\partial n). \qquad \text{(IV.47)}$$

Пусть в некоторый начальный момент вдоль поверхности скачка насыщенность постоянна и выполняется условие (IV.45). Пусть, кроме того, везде за скачком (т. е. со стороны контуров нагнетания) $s > s_c$, $F'(s) < F'(s_c)$, т. е. насыщенности за скачком в его окрестности не «обгоняют» насыщенность на скачке в соответствии с условиями (IV.32) и (IV.33), а насыщенность s_0 постоянна. Тогда, очевидно, скачок и изосата $s = s_c$ будут распространяться совместно, т. е. условие (IV.45) будет выполняться в течение конечного промежутка времени. В частности, если начальная насыщенность постоянна,

РИС. 39. К графическому построению решения Баклея — Леверетта на плоскости s, F; функция $F(s)$ та же, что на рис. 37.

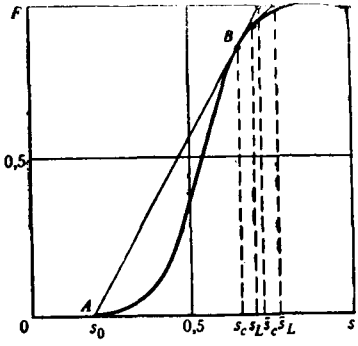
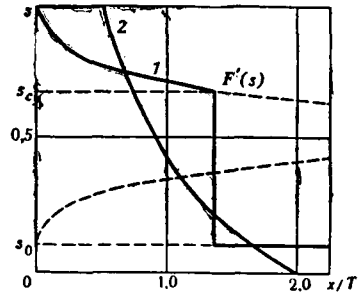


РИС. 40. Распределение насыщенности при автомодельном решении задачи Баклея — Леверетта: *1* — для проницаемостей, показанных на рис. 37; *2* — для прямолинейных относительных проницаемостей ($\mu_0 = 0{,}5$)



а на нагнетательных скважинах равна s^*, то в окрестности скважин в начале вытеснения осуществляется решение Баклея — Леверетта для плоско-радиального течения. В таком случае на образующихся скачках (фронтах вытеснения) насыщенность определяется по соотношению (IV.45) и в дальнейшем при искривлении поверхности скачка продолжает оставаться постоянной и равной s_c. Выполнимость условия Баклея — Леверетта в общем случае плоского вытеснения была отмечена Г. П. Цыбульским.

Частные случаи. Рассмотрим некоторые частные случаи одномерной задачи вытеснения и следствия из формул Баклея — Леверетта.

Образование скачков насыщенности связано с существованием интервалов изменения s, на которых функция $F(s)$ имеет вогнутую форму. В зависимости от вида кривых относительной проницаемости и отношения вязкостей возможно как отсутствие таких интервалов и, следовательно, скачков насыщенности, так и образование нескольких скачков. Рассмотрим случай, когда относительные проницаемости могут считаться пропорциональными соответствующим насыщенностям, т. е. $f_1 = s$, $f_2 = 1 - s$. Такими функциями можно описать совместное течение взаимно смешивающихся жидкостей, когда распределение фаз в порах полностью случайно и не связано с капиллярными силами, причем каждая из фаз сохраняет подвижность при любой насыщенности. Тогда

$$F(s) = s/[\mu_0 + (1 - \mu_0)\, s], \quad F'(s) = \mu_0/[\mu_0 + (1 - \mu_0)\, s]^2,$$
$$F''(s) = -2\mu_0 (1 - \mu_0) / [\mu_0 + (1 - \mu_0)\, s]^3. \qquad \text{(IV.48)}$$

Из (IV.48) следует, что функция $F''(s)$ сохраняет знак при любых s, причем, если $\mu_0 < 1$, то $F''(s) < 0$, и обратно: если $\mu_0 > 1$, то $F''(s) > 0$. В первом из этих случаев по формуле (IV.37) получаем непрерывную монотонно убывающую зависимость $s(x)$ при любом t. Вид решения Баклея — Леверетта при условии, что функция $F(s)$ выражается формулой (IV.48) и $\mu_0 = 0{,}5$, показан на рис. 40 вместе с решением Баклея — Леверетта для обычных функций относительной проницаемости. Если $\mu_0 \geqslant 0$, производная $F''(s)$ нигде не отрицательна. Вследствие этого непрерывное решение, соответствующее (IV.37), не существует. Решение со скачком соответствует предельному случаю «поршневого» вытеснения:

$$s = 1 \ (x < Um); \ \ s = s_0 \ (x > Um). \qquad \text{(IV.49)}$$

Физически это означает, что если вязкость вытесняющей фазы больше, чем вытесняемой, процесс вытеснения имеет поршневой характер. Если же больше вязкость вытесняемой фазы, фронт вытеснения «размывается». Качественное различие вида решения при значениях параметра μ_0, больших и меньших единицы, связано с вопросом об устойчивости фронта вытеснения, рассматриваемым в § 5 настоящей главы. Решения уравнения (IV.40) с функцией $F(s)$ вида (IV.48) рассматривались А. М. Пирвердяном в связи с задачей о перемещении водонефтяного контакта.

Одной из практически важных характеристик вытеснения нефти водой является коэффициент нефтеотдачи, т. е. доля вытесненной нефти от первоначального ее содержания в пористой среде. Из автомодельных решений вида (IV.46) можно получить простые соотношения, позволяющие оценить зависимость коэффициента нефтеотдачи от объема прокачанной жидкости и отношения вязкостей фаз. Пусть вытеснение происходит из элемента трубки тока между сечениями $x = 0$ и $x = L$ при $s(x, 0) = s_0 = \text{const}$. Поскольку условия в выходном сечении $x = L$ не влияют на решение задачи Баклея — Леверетта, формулы (IV.46) справедливы для образца конечной длины L, причем насыщенность в выходном сечении находится по формулам (IV.42) или (IV.46) как $s(L, t)$.

Пусть насыщенность в выходном сечении $x = L$, s_L равна или больше насыщенности на скачке s_c, определяемой формулой (IV.45), т. е. рассматриваются моменты времени после прорыва вытесняющей жидкости через выходное сечение. Для насыщенности при $x = L$, $s = s_L$ выполняется равенство

$$F'(s_L) = L/Um. \tag{IV.50}$$

Средняя насыщенность в рассматриваемом участке с учетом (IV.46) равна

$$\bar{s} = L^{-1} \int_0^L s\,dx = (F'(s_L))^{-1} \int_{s^*}^{s_L} sF''(s)\,ds = s_L + (1 - F(s))/F'(s_L) - \\ - s^* F'(s^*)/F'(s_L). \tag{IV.51}$$

Обычно вид функций $f_1(s)$ и $f_2(s)$ таков, что $f_2'(s^*) = 0$ и $f_1'(s_*) = 0$, откуда и $F'(s^*) = 0$. Тогда, по Уэлджу, связь между $\bar{s}$ и s_L примет вид

$$\bar{s} = s_L + (1 - F(s_L))/F'(s_L). \tag{IV.52}$$

Отсюда следует, что при заданном s_L значение $\bar{s}$ можно найти с помощью простого построения на плоскости F, s, указанного на рис. 39. В частности, средняя насыщенность при прорыве вытесняющей фазы находится на пересечении касательной к $F(s)$ из точки s_0, $F(s_0)$ (дающей значение s_c) с прямой $F = 1$. Зная $\bar{s}$, нетрудно найти коэффициент нефтеотдачи η и обратно:

$$\eta = (\bar{s} - s_0)/(1 - s_0); \quad \bar{s} = (1 - s_0)\,\eta + s_0. \tag{IV.53}$$

Кроме определения коэффициента нефтеотдачи, формулы (IV.51) и (IV.52) можно использовать для нахождения вида функции $F(s)$ по экспериментальным данным, полученным при вытеснении нефти водой. Измеряя расходы нефти и воды q_2 и q_1 в каждый момент времени, можно найти по ним текущее значение функции F, соответствующее насыщенности в выходном сечении s_L: $F(s_L) = q_1/(q_1 + q_2)$. Далее, по текущей нефтеотдаче можно найти значение $\bar{s}$ в любой момент времени. После этого значение s_L, соответствующее данному F, можно определить по формуле (IV.51) с учетом (IV.50):

$$s_L = \bar{s} - Um\,(1 - F)/L. \tag{IV.54}$$

На основе автомодельного решения Баклея – Леверетта, Д. А. Эфрос [48] и ряд других исследователей предложили формулы, позво-

ляющие определить по данным вытеснения нефти водой в линейном образце не только функцию $F(s)$, но и относительные проницаемости. Для линейного вытеснения после прорыва вытесняющей фазы перепад давления Δp можно выразить формулой, следующей из (IV.41):

$$\Delta p = \mu_1 u_0 U m k^{-1} \int_{s^*}^{s_L} F''(s)[f_1(s) + \mu_0 f_2(s)]^{-1} ds. \qquad \text{(IV.55)}$$

Заменив в соотношении (IV.55) переменную s на $F' = dF/ds$, получим

$$\int_0^{F'_L} (F/f_1)\, dF' = \Delta p\,(t)\, k F'_L / u_0\,(t)\, \mu_1 L, \quad F'_L = F'(s_L). \qquad \text{(IV.56)}$$

Полагая $$k\Delta p / u_0\,(t)\, \mu_1 L = \Pi$$

и дифференцируя соотношение (IV.56) по $U = mL/F'_L$, найдем для $f_1(s_L)$:

$$f_1(s_L) = F/[\Pi - U\,(d\Pi/dU)]. \qquad \text{(IV.57)}$$

Все величины, входящие в правую часть (IV.57), можно вычислить по результатам измерений интегральных характеристик процесса вытеснения и перепада давления.

Схемой Баклея — Леверетта можно описать также одномерное двухфазное течение с учетом силы тяжести. В крупномасштабном приближении, т. е. в области, где можно пренебречь влиянием капиллярных сил, выражение закона фильтрации двухфазной жидкости с учетом силы тяжести имеет вид:

$$u_1 = -(k f_1(s)/\mu_1)\, \partial(p + \rho_1 g \sin\alpha)/\partial x,$$
$$u_2 = -(k f_2(s)/\mu_2)\, \partial(p + \rho_2 g \sin\alpha)/\partial x. \qquad \text{(IV.58)}$$

При этом ось x направлена вверх, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Уравнения неразрывности сохраняют для прямолинейного течения вид

$$m\partial s/\partial t + \partial u_1/\partial x = 0, \quad u_1 + u_2 = u(t). \qquad \text{(IV.59)}$$

Простые преобразования приводят к одному уравнению для s, если $u(t)$ задано:

$$m\partial s/\partial t + u\partial F(s)/\partial x - W\partial[f_2(s) F(s)]/\partial x = 0, \qquad \text{(IV.60)}$$

где $W = (kg/\mu_2)(\rho_1 - \rho_2)\sin\alpha$,

$$u_1 = uF(s) - W f_2(s) F(s).$$

Решение уравнения (IV.60) определяется интегрированием системы уравнений характеристик

$$dx/dt = u(t) F'(s) - W df_2 F/ds; \quad s = \text{const}. \qquad \text{(IV.61)}$$

Если характеристики, определяемые уравнениями (IV.61), пересекаются на плоскости x, t, для отыскания решения, имеющего физический смысл, нужно вводить скачки насыщенности. Условия

на скачках снова выражаются формулами (IV.36) и (IV.38), где вместо $F(s)$ следует подставить функцию $\psi(s, t) = uF - Wf_2F$.

Особый интерес представляет течение при условии $u(t) = 0$, что соответствует разделению фаз под действием силы тяжести (гравитационная сегрегация). Если пласт неограничен по толщине, а жидкости вначале разделены резкой горизонтальной границей, причем более тяжелая жидкость находится сверху, т. е. $s = 1$ при $x > 0$, $s = 0$ при $x < 0$, решение уравнения (IV.60) при $u = 0$ может быть записано в виде

$$\xi = xm/Wt = -d(f_2F)/ds. \qquad \text{(IV.62)}$$

Функция $\psi(s) = f_2F$, типичный вид которой изображен на рис. 41, имеет две точки перегиба, что вызывает возникновение двух скачков, на которых должно выполняться условие

$$dx_c/dt = \xi_c = [\psi(s_c) - \psi(s_0)]/(s_c - s_0). \qquad \text{(IV.63)}$$

Для стационарного скачка должно выполняться условие, аналогичное (IV.19):

$$\psi'(s_c) = [\psi(s_c) - \psi(s_0)]/(s_c - s_0). \qquad \text{(IV.64)}$$

Согласно этому условию, насыщенности s_{c1} и s_{c2} находятся с помощью графического построения на плоскости ψ, s, показанного на рис. 41. Соответствующая картина распространения скачков на плоскости s, ξ показана на рис. 42.

Предлагаем читателю самостоятельно исследовать движение, возникающее, когда при всех $x > 0$ $s(0, t) = s_1 = \text{const}$, $s_* < s_1 < s^*$, граница $x = 0$ непроницаема, что соответствует сегрегации равномерно распределенных фаз.

§ 3. Структура течения при мелкомасштабном описании. Стабилизированная зона. Капиллярные эффекты в пористых средах.

Стабилизированная зона. При крупномасштабном асимптотическом описании вытеснения несмешивающихся жидкостей воз-

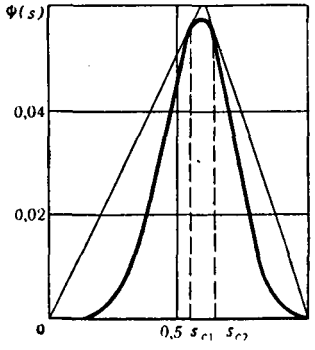


РИС. 41. К построению решения задачи о гравитационной сегрегации на плоскости $\psi(s)$; $f_1 = s^4$; $f_2 = (1+s) \times (1-s)^3$; $\mu_0 = 1$, 0

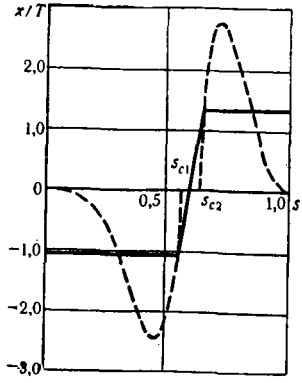


РИС. 42. Распределение насыщенности для автомодельного решения задачи о гравитационной сегрегации

никают поверхности разрыва — скачки насыщенности. При решении полной системы уравнений (IV.19) и (IV.20) им соответствуют узкие зоны с большими значениями $|\operatorname{grad} s|$. Для описания распределения насыщенности в переходной зоне, соответствующей скачку, введем в окрестности некоторой точки O поверхности разрыва насыщенности локальную декартову систему координат с центром в этой точке. Ось x направим по нормали к поверхности разрыва и введем вдоль этой оси масштаб $l = \varepsilon L$, где, как и ранее, $\varepsilon = a^2/u_0 L$ $(u_0 = k\Delta p/\mu_1 L)$, т. е. полсжим безразмерную координату X равной x/l, сохранив $Y = y/L$, $Z = z/L$. Масштаб времени примем равным $t_0 = l/u_0 = a^2/u_0^2$ и положим $\tau = t/t_0 = u_0^2 t/a^2$. Тогда система уравнений (IV.19), (IV.20) при пренебрежении членами порядка ε и выше сведется к следующей:

$$\partial[\varphi(s)\,\partial\Pi/\partial X]/\partial X = 0,\quad \varphi(s)\,\partial\Pi/\partial X = -\omega(Y, Z, \tau), \qquad \text{(IV.65)}$$

$$\partial s/\partial\tau + (\omega/m) F'(s)\,\partial s/\partial X - \partial^2\Phi(s)/\partial X^2 = 0,\quad \omega = u/u_0. \qquad \text{(IV.66)}$$

Система уравнений двухфазной фильтрации свелась к одномерной ввиду того, что радиус кривизны поверхности разрыва, определяемый условиями внешнего течения, имеет порядок L и все вторые производные по координатам Y и Z входят в уравнения с коэффициентами, пропорциональными ε, а производные по X — с коэффициентами порядка единицы.

В пределах переходной зоны, где течение можно считать одномерным, суммарная скорость ω фильтрации обеих фаз вдоль оси X не зависит от «быстрой» координаты X, а зависит только от «медленных» переменных — времени τ и координат на поверхности скачка Y и Z. Изменение скорости ω происходит за времена порядка L/u_0, т. е. большие в масштабе внутреннего разложения. Установление распределения насыщенности вдоль переходной зоны происходит за время $t_0 = a^2/u_0^2$, т. е. много быстрее, чем изменение скорости. Поэтому при асимптотическом исследовании течения в переходной зоне (внутреннее разложение) скорость ω можно считать постоянной, а распределение насыщенности — стационарным в координатах, связанных со скачком.

Уравнение (IV.66), описывающее одномерное вытеснение несмешивающихся жидкостей с учетом капиллярных сил, называется уравнением Рапопорта — Лиса. Основное значение имеет его решение типа бегущей волны

$$s = s(\zeta);\ \zeta = X - V^0\tau;\ V^0 = V/u_0, \qquad \text{(IV.67)}$$

где V — скорость распространения скачка, определяемая из внешнего разложения. Именно это решение описывает распределение насыщенности поперек скачка, поскольку внутренняя структура скачка очень быстро приспосабливается к изменению внешних параметров. В силу большого различия масштабов l и L $(l \ll L)$ должны выполняться граничные условия сращивания:

$$s(-\infty) = s^- = s_c;\ s(+\infty) = s^+ = s_0, \qquad \text{(IV.68)}$$

где $s^- = s_c$ и $s^+ = s_0$ — соответственно насыщенности за и перед скачком, определяемые из внешнего разложения. В задаче Баклея —

Леверетта они связаны соотношением (IV.45). Скорость распространения поверхности разрыва V^0 в равенстве (IV.67), определяется формулой (IV.38).

Используя (IV.6 7), получим вместо (IV.66) уравнение

$$-mV^0 ds/d\zeta + \omega F'(s)\, ds/d\zeta - md\,[\Phi'(s)\, ds/d\zeta]/d\zeta = 0. \qquad \text{(IV.69)}$$

Интегрируя уравнение (IV.69) по ζ с учетом условий (IV.68) и разрешая относительно $d\zeta/ds$, имеем

$$d\zeta/ds = m\Phi'(s) / [\omega (F(s) - F(s_0)) - mV^0 (s - s_0)]. \qquad \text{(IV.70)}$$

Отсюда с учетом формулы (IV.38) для скорости скачка V

$$\zeta - \zeta_1 = \frac{m(s_c - s_0)}{\omega} \int_{s_1}^{s} \frac{\Phi'(s)\, ds}{[F(s) - F(s_0)](s_c - s_0) - [F(s_c) - F(s_0)](s - s_0)}, \qquad \text{(IV.71)}$$

где s_1 ($s_0 < s_1 < s_c$) и ζ_1 — произвольно выбираемое начало отсчета координат. Если скачок стационарный и выполняется условие (IV.45), то вместо (IV.71) имеем

$$\zeta - \zeta_1 = \frac{m}{\omega} \int_{s_1}^{s} \frac{\Phi'(s)\, ds}{F(s) - F(s_0) - F'(s_c)(s - s_0)}. \qquad \text{(IV.72)}$$

Формула (IV.72) описывает распределение насыщенности в переходной зоне (рис. 43), которая ввиду стационарного распределения в ней насыщенности традиционно называется стабилизированной зоной. Ширина стабилизированной зоны δ определяется как расстояние между точками, насыщенности в которых отличаются от предельных s_c и s_0 на некоторую малую величину σ^0, т. е. как

$$\delta = \zeta(s_0 + \sigma^0) - \zeta(s_c - \sigma^0).$$

В размерных переменных ширина стабилизированной зоны $l\delta = a^2\delta/u_0$, т. е. обратно пропорциональна скорости фильтрации или скорости скачка.

Знаменатель подынтегрального выражения в (IV.71) порядка $A(s - s_c)$, а в (IV.72) порядка $A_1(s - s_c)^2$, числитель же остается конечным при $s \to s_c$. Поэтому при $\zeta \to -\infty$ имеем в первом случае

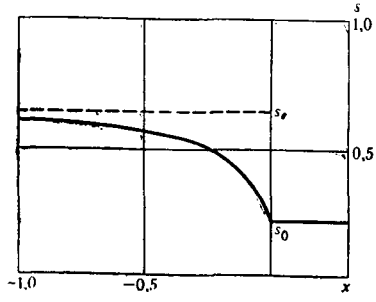
$$s \approx s_c - C_1 \exp(\zeta/B),$$
$$\zeta_1 - \zeta \approx B \ln(s_c - s), \qquad \text{(IV.73)}$$

а во втором

$$s \approx s_c + C_2/\zeta, \quad \zeta = C_2/(s - s_c). \qquad \text{(IV.74)}$$

При $s \to s_0$, т. е. $\zeta \to +\infty$, знаменатель подынтегрального выражения в (IV.71) и (IV.72) имеет порядок $s - s_0$. Поэтому, если $F(s)$ и $F'(s)$ конечны при $s = s_0$, то имеем

РИС. 43. Распределение насыщенности в стабилизированной зоне



$$\zeta - \zeta_1 \approx C_3 \ln (s - s_0). \qquad \text{(IV.75)}$$

Если $F(s_0) = 0$, то $s_0 \leqslant s_*$. Это означает, что вытесняющая фаза при $\zeta \to +\infty$ находится в несвязном состоянии. Рассмотрим вначале случай $s_0 = s_*$. Тогда, учитывая, что $\Phi'(s) = -f_2(s) F(s) J'(s)$ и что при s, близких к s_*, $F(s) \approx f_1(s) \approx (s - s_*)^\beta$, где $\beta > 1$, характер функции $\zeta(s)$ будет зависеть от сходимости интеграла

$$I(s_1) = \int_{s_1}^{s_*} (s - s_*)^{\beta-1} J'(s)\, ds. \qquad \text{(IV.76)}$$

Если интеграл (IV.76) сходится, то s обращается в s_* при конечном значении ζ, если же расходится, то у кривой $s(\zeta)$ имеется горизонтальная асимптота. Как уже отмечалось в § 1 данной главы, капиллярное давление и функция Леверетта $J(s)$ должны быть конечными при «неподвижной» насыщенности s_*, поэтому сходится интеграл $\int J'(s)\, ds$ и тем более интеграл (IV.76). Расходимость интеграла (IV.76) может быть лишь следствием неудачной аппроксимации эмпирических функций относительной проницаемости и функции Леверетта. Сходимость интеграла (IV.76) при $s \to s_*$ означает, что равенство $s = s_*$ достигается при конечном значении координаты $\zeta = \zeta_*$ и при всех $\zeta > \zeta_*$ s остается постоянным и равным s_*, т. е. существует выраженный фронт вытеснения.

Если же насыщенность s_0 при $\zeta \to +\infty$ меньше s_*, то для всех s в интервале $s_0 < s < s_*$ $\zeta = \text{const}$, т. е. насыщенность от s_0 до s_* меняется скачком. Возникновение скачка в решении задачи о вытеснении с учетом капиллярных сил связано с допущением, что при насыщенностях, меньших s_0, вся вытесняющая фаза находится в несвязном состоянии. По-видимому, на самом деле часть этой фазы вблизи фронта становится подвижной и при насыщенностях, меньших, чем s_*, и вблизи скачка имеется зона, где происходит обмен между связной и несвязной частями вытесняющей фазы.

Как было сказано, протяженность стабилизированной зоны обратно пропорциональна a^2/u_0, т. е. при использовании одной и той же среды и жидкостей обратно пропорциональна скорости вытеснения. Экспериментальная проверка этой зависимости проведена В. Н. Мартосом и В. М. Рыжиком. В экспериментах воздух вытеснялся водой при атмосферном давлении на выходе с постоянной скоростью из горизонтальных труб длиной 170 см, заполненных кварцевым песком с проницаемостью 10 мкм^2 и пористостью 0,40. Начальная (неподвижная) водонасыщенность равнялась 0,21. Распределение водонасыщенности по длине модели измерялось методом электросопротивления. Скорость вытеснения u_0 менялась в пределах $1{,}1 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-4}$ м/с. Во всех экспериментах изменение водонасыщенности со временем в различных точках по длине модели практически повторялось со сдвигом, обратно пропорциональным скорости вытеснения, т. е. образовывалась стабилизированная зона.

Протяженность стабилизированной зоны d условно определялась как расстояние между точками с насыщенностями 0,40 и 0,80. Из рис. 44 видно, что при малых скоростях ($V^{-1} > 2 \cdot 10^4$ с/м) d при-

близительно пропорционально V^{-1}, как и следует из вышеуказанной теории. Однако при значении V^{-1} около $1 \cdot 10^4$ с/м $d(V^{-1})$ имеет минимум, а при меньших значениях V^{-1} снова наблюдается рост стабилизированной зоны. По-видимому, увеличение d связано с неравновесностью вытеснения, т. е. с запаздыванием перераспределения фаз в порах (см. § 4 данной главы).

Существование минимума на кривой $d(V^{-1})$ согласуется с обнаруженным ранее В. Г. Оганджанянцем наличием максимума на кривой зависимости нефтеотдачи при прорыве воды от скорости вытеснения.

Область применимости уравнения Рапопорта — Лиса ограничивается в описанных экспериментах скоростями менее $5 \cdot 10^{-5}$ м/с или значениями безразмерного параметра N_c

$$N_c = \frac{u_0 \mu_1}{\alpha} < 0{,}7 \cdot 10^{-6}.$$

Такое критическое значение N_c на несколько порядков ниже критических значений N_c, необходимых для движения в порах изолированных капель, размер которых сравним с размером пор (см. § 1 данной главы). Как и аналогичный результат Д. А. Эфроса и В. П. Оноприенко о влиянии параметра $N_c = \Pi_1$ на нефтеотдачу, это означает, что характерные размеры систем поровых каналов, занятых каждой из фаз, и изолированных скоплений каждой фазы намного больше характерных размеров пор. Соответственно могут быть значительными и характерные времена перестройки потока под действием капиллярных сил. Возникающие при такой перестройке неравновесные явления в ходе вытеснения несмешивающихся жидкостей изучаются в § 4 настоящей главы.

Граничные условия и концевые эффекты. Рассмотрим задачу о вытеснении несмешивающихся жидкостей из образца длины L с учетом капиллярных сил в одномерной постановке, т. е. на основе уравнения Рапопорта — Лиса (IV.66), которое запишем в размерных переменных:

$$\partial s/\partial t + (u_0 F'(s)/m)\, \partial s/\partial x - a^2 \partial^2 \Phi(s)/\partial x^2 = 0, \qquad \text{(IV.77)}$$

РИС. 44. Экспериментальная зависимость длины стабилизированной зоны от обратной скорости вытеснения

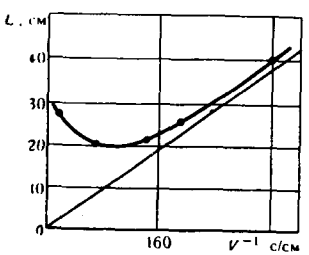
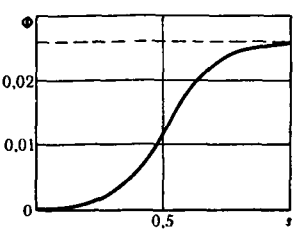


РИС. 45. Функция $\Phi(s)$



где

$$a^2 = \alpha\sqrt{k}/\mu_1\sqrt{m},\ \Phi(s) = -\int_0^s f_2(s)\,F(s)\,J'(s)\,\partial s.$$

В тех же обозначениях из уравнений обобщенного закона Дарси (IV.11) и (IV.12) следует:

$$u_1 = u_0 F(s) - a^2 m \partial\Phi/\partial x,\ u_2 = u_0 - u_1. \qquad \text{(IV.78)}$$

Типичный вид функции $\Phi(s)$, соответствующей относительным проницаемостям $f_1(s) = s^4$, $f_2(s) = (1+s)(1-s)^3$ и $J'(s) = s^{-1/2}$, показан на рис. 45.

Пусть образец длины L первоначально заполнен вытесняемой жидкостью с насыщенностью $s_0(x) = 1 - s_0(x)$, и через сечение $x = 0$ начинается закачка вытесняющей фазы со скоростью фильтрации $u = u_0(t)$.

Уравнение (IV.77) — квазилинейное уравнение в частных производных второго порядка параболического типа. В задаче о вытеснении для этого уравнения должны быть заданы граничные условия как во «входном» сечении при $x = 0$, так и в «выходном», при $x = L$.

Формулировка граничных условий зависит от состояния жидкостей и пористой среды вне рассматриваемого образца и от преимущественной смачиваемости его скелета вытесняющей или вытесняемой фазой, т. е. в случае вытеснения нефти водой от того, является среда гидрофильной или гидрофобной.

Заданными на входе могут быть отношение скоростей фильтрации фаз либо насыщенность, либо некоторая их комбинация. Рассмотрим некоторые типичные постановки. Пусть пористая среда соприкасается при $x<0$ со свободным пространством, заполненным нагнетаемой вытесняющей фазой. При этом возможны две ситуации. Если вытесняющая фаза менее смачивающая, то только она и будет двигаться в сечении, примыкающем к входному концу, т. е. будет выполняться условие равенства нулю скорости фильтрации вытесняемой фазы при $x=0$, что с учетом формул (IV.78) дает

$$u_2 = u_0(1 - F(s_1)) + a^2 m \partial\Phi/\partial x = 0,\ x = 0, \qquad \text{(IV.79)}$$

где $s_1 = s(0, t)$.

Если же вытесняющая фаза более смачивающая, чем вытесняемая (гидрофильная среда), то последняя может выходить в свободное пространство путем противотока. Поэтому условие (IV.79) выполняется только в том случае, если на входном конце образца установлена полупроницаемая мембрана (из материала противоположной смачиваемости), не допускающая противоточной фильтрации вытесняемой фазы. Если же возможен выход несмачиваемой вытесняемой жидкости в свободное пространство, заполненное вытесняющей фазой, то такое истечение происходит в виде отдельных капель, радиус которых r_p близок к радиусу самых крупных пор. В таком случае при $x=0$ задается условие

равенства капиллярного давления в среде капиллярному давлению в капле

$$P_c(s_1) = 2\alpha/r_p, \qquad \text{(IV.80)}$$

откуда определяется значение $s_1 = s(0, t)$. Поскольку радиус r_p велик по сравнению со средним радиусом пор, s_1 оказывается близким к s^* — максимально возможной насыщенности при вытеснении.

Условие (IV.79) в безразмерных переменных внешнего разложения $X = x/L$, $\tau = u_0 t/L$ имеет вид

$$1 - F(s_1) + \varepsilon \partial\Phi/\partial x|_{x=0} = 0, \qquad \text{(IV.81)}$$

где $\varepsilon = a^2/u_0 L$ — малая величина. При $\varepsilon \to 0$, т. е. в рамках нулевого приближения внешнего разложения, условие (IV.81) сводится к $F(s_1) = 1$ или $s_1 = s^*$.

Формулировка условия при $x = L$ также зависит от состояния среды вне рассматриваемого образца и может быть различной. Предположим, что при $x > L$ находится пористая среда, проницаемость которой k_* много больше, чем проницаемость рассматриваемого образца, первоначально насыщенного вытесняемой фазой. На границе двух сред при двухфазном течении должно выполняться условие непрерывности давления в обеих фазах и, следовательно, непрерывности капиллярного давления. Из соотношения Леверетта (IV.10) следует, что в высокопроницаемой среде капиллярное давление близко к нулю при всех насыщенностях, соответствующих подвижным фазам. Поэтому в основной (малопроницаемой) среде при равенстве капиллярных давлений насыщенность должна быть близка к s^*, если вытесняющая фаза более смачивающая (гидрофильная среда при вытеснении нефти водой), и к s_*, если она менее смачивающая (гидрофобная среда). Предельный переход $k_* \to \infty$ приводит к случаю, когда при $x > L$ происходит истечение в свободное пространство, причем выполняются граничные условия вида

$$s(L, t) = s^*, \quad s(L, t) = s_*. \qquad \text{(IV.82)}$$

для гидрофильной и гидрофобной сред соответственно (под s подразумевается насыщенность вытесняющей фазой).

Условия (IV.82) в отличие от (IV.81) не согласуются с условиями при $x = L$, вытекающими из внешнего разложения (решение Баклея — Леверетта), в котором $s(L, t) = s_L$ — переменная величина, определяемая из равенства $L = u_0 F'(s_L)\, t/m$. Несогласованность граничных условий означает, что вблизи границы $x = L$ образуется узкая зона (пограничный слой) с переменной насыщенностью, меняющейся от s_L до s_* или до s^*. Распределение насыщенности в этой зоне можно исследовать методом сращиваемых асимптотических разложений, вводя, как и в стабилизированной переходной зоне, «капиллярный» пространственный масштаб $l = a^2/u_0$, сохраняя, однако, масштаб времени внешнего разложения. Заметим, что при вытеснении нефти водой из гидрофильной среды начальная насыщенность $s_0 < s^*$. Значение $s = s^*$ при $x = L$ достигается после подхода воды к выходному сечению не мгновенно, а через времена

порядка $t_0 = a^2/u_0^2$. Значение t_0 много меньше характерного времени вытеснения L/u_0; период установления насыщенности s^* при $x = L$ нами не рассматривается. Перейдем в уравнении (IV.77) к безразмерным переменным $\xi = u_0(L - x)/ma^2$, $\tau = u_0 t/m$. В результате имеем

$$\varepsilon \partial s/\partial \tau - F'(s)\,\partial s/\partial \xi - \partial^2 \Phi(s)/\partial \xi^2 = 0. \qquad \text{(IV.83)}$$

В нулевом приближении распределение насыщенности удовлетворяет стационарному уравнению

$$\partial F/\partial \xi + \partial^2 \Phi/\partial \xi^2 = 0. \qquad \text{(IV.84)}$$

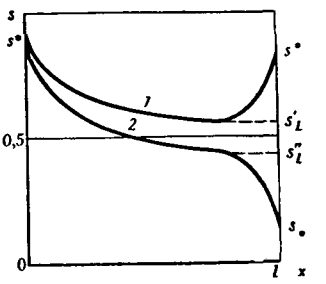


РИС. 46. Распределение насыщенности при вытеснении нефти водой с учетом концевых эффектов

Среда: *1* — гидрофильная; *2* — гидрофобная

Это означает, что вблизи выходного сечения распределение насыщенности в ходе вытеснения квазистационарно. Граничные условия для уравнения (IV.84) определяются следующим сбразом: при $\xi = 0$ выполняется условие (IV.82). При $\xi \to \infty$ должно выполняться условие асимптотического сращивания с тем значением s, которое получается на границе $x = L$ во внешнем приближении, т. е. в решении задачи Баклея — Леверетта $s(-\infty, t) = s_L(t)$, где s_L определяется из (IV.46) как $s(L, t)$. Интегрируя уравнение (IV.84), получим распределение насыщенности вблизи $x = L$, удовлетворяющее граничным условиям при $\xi = 0$ и $\xi = -\infty$ (рис. 46).

Гидрофильная среда

$$\xi = -\int_{s}^{s^*} \frac{\Phi'(s)\,ds}{F(s) - F(s_L)}. \qquad \text{(IV.85)}$$

Гидрофобная среда

$$\xi = \int_{s_*}^{s} \frac{\Phi'(s)\,ds}{F(s) - F(s_L)}.$$

Отклонение распределения насыщенности вблизи выходного сечения от распределения, полученного без учета капиллярности и справедливого вне концевой области, называется капиллярным концевым эффектом.

Из формул (IV.85) следует, что распределение насыщенности после полного вытеснения нефти в гидрофобной и гидрофильной пористых средах различное, т. е. в зависимости от того, какая из фаз является более смачивающей.

Для гидрофильной среды при $t \to \infty$, $s_L \to s^*$ амплитуда изменения насыщенности в интеграле (IV.85) стремится к нулю, и в пределе $s = s^*$ при всех x $0 \leqslant x \leqslant L$, т. е. во всех точках, достигается предельная насыщенность. Если среда гидрофобна, то $s_L \to s_*$, а нижним пределом в (IV.85) является s_*. Поэтому с ростом s_L интеграл стремится к конечному пределу для всех $s < s_L$. Это означает,

что после полного вытеснения, т. е. после прокачки неограниченного объема воды, в гидрофобном образце остается конечный объем нефти с насыщенностью выше неподвижной $\sigma = 1 - s^*$.

Перепишем интеграл (IV.85) для гидрофобной среды в размерных переменных

$$L - x = \frac{a^2}{u_0} \int_{s_*}^{s} \frac{\Phi'(s)\, ds}{F(s) - F(s_*)}. \qquad \text{(IV.86)}$$

Формула (IV.86) описывает стационарное распределение остаточной нефти в образце. Из нее следует, что протяженность зоны концевого эффекта, т. е. зоны, содержащей остаточную нефть, обратно пропорциональна скорости вытеснения. Таким образом, конечная нефтеотдача гидрофобных сред возрастает с ростом скорости вытеснения, а нефтеотдача гидрофильных сред от скорости не зависит. Этот вывод был неоднократно подтвержден экспериментально.

Капиллярная пропитка. В неоднородных пластах возможны ситуации, когда при вытеснении несмешивающихся жидкостей влияние капиллярных сил на процесс вытеснения оказывается доминирующим. Важнейшим процессом подобного рода является капиллярная пропитка — самопроизвольное впитывание более смачивающей фазы в пористую среду, насыщенную другой фазой, без внешнего воздействия на какую-либо из жидкостей. Так обстоит дело, когда малопроницаемый блок породы, насыщенный нефтью, оказывается окруженным со всех сторон водой, продвигающейся по высокопроницаемым участкам. Тогда извлечение нефти из этого блока возможно лишь за счет капиллярной пропитки. Для получения качественных оценок рассмотрим следующий идеализированный процесс. Пусть цилиндрический образец пористой среды первоначально заполнен менее смачивающей фазой. Боковые поверхности и один из торцов предполагаются непроницаемыми, а свободный торец в начальный момент приводится в соприкосновение со смачивающей жидкостью. В результате начнется процесс противоточной капиллярной пропитки, т. е. смачивающая фаза будет впитываться, а несмачивающая выходить через единственную открытую торцевую поверхность. Очевидно, впитывание будет происходить преимущественно по мелким порам, а выход несмачивающей фазы — по крупным.

Как показывают эксперименты по противоточной пропитке, проведенные на прозрачных образцах, фильтрация обеих фаз во встречных направлениях происходит равномерно по всему сечению, и каждая из фаз движется по своей системе поровых каналов. Противоточную пропитку поэтому можно рассматривать в рамках представлений, принятых для обычной одномерной двухфазной фильтрации. Относительные проницаемости для противоточного течения могут отличаться от соответствующих функций при однонаправленном течении обеих фаз. Однако в последующем качественном исследовании это различие не учитывается.

Уравнение закона фильтрации будем записывать в виде (IV.10) и использовать уравнение Рапопорта — Лиса (IV.77) при условии для противоточного течения:

$$u_0 = u_1 + u_2 = 0. \tag{IV.87}$$

что дает

$$\partial s/\partial t - a^2 \partial^2 \Phi(s)/\partial x^2 = 0. \tag{IV.88}$$

Из (IV.78)

$$u_1 = -a^2 m \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a^2 m f_2(s) F(s) J'(s) \frac{\partial s}{\partial x}. \tag{IV.89}$$

В задаче о противоточной капиллярной пропитке граничным условием во входном сечении должно быть равенство нулю капиллярного давления, так как $P_c = 0$ в свободной жидкости. Иными словами, $s(0, t) = s^*$, где s^* — предельная насыщенность, при которой вытесняемая несмачивающая фаза переходит в несвязное состояние и капиллярное давление обращается в нуль. Поскольку $f_2(s^*) = 0$, то для того, чтобы при $s \to s^*$ u_1 и u_2 оставались конечными, необходимо, чтобы предел $f_2(s) J'(s) \frac{\partial s}{\partial x}$ при $x \to 0$, $s \to s^*$ был отличен от нуля.

В закрытом сечении при $x = L$ выполняется условие $u_1 = u_2 = 0$, т. е. либо $s < s_*$, либо $\partial s/\partial x = 0$. Пусть начальная насыщенность постоянна и равна s_0. Рассмотрим течение при временах t, удовлетворяющих неравенству

$$k/a^2 \ll t \ll L^2/a^2, \tag{IV.90}$$

т. е. таких, когда распределение насыщенности в порах в тонкой зоне вблизи входного сечения (толщиной порядка размера пор) уже установилось, но возмущение не дошло до сечения $x = L$. Тогда s должно быть функцией только трех размерных переменных x, t и a^2, из которых может быть составлена единственная безразмерная комбинация $\xi = x/a\sqrt{t}$, т. е. задача является автомодельной. Уравнение (IV.89) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\xi ds/d\xi + 2d^2\Phi/d\xi^2 = 0 \tag{IV.91}$$

с граничными условиями

$$s(0) = s^*, \; s(\infty) = s_0. \tag{IV.92}$$

Для s, близких к s^*, $\Phi(s)$ можно приближенно представить в виде $\Phi(s) \approx \Phi_a - A(s^* - s)^n$. Тогда решение уравнения (IV.91) при условии $s(0) = s^*$ имеет для малых ξ вид $s^* - s = C\xi^{2/n-1}$. Меняя C, можно получить семейство решений, каждому из которых соответствует свое значение $s(\infty) = s_0$. Если $s(0) < s^*$, то такое же семейство решений можно получить, меняя $s'(0)$ (рис. 47). Искомое решение для заданного $s_0 > s_*$ можно получить подбором такого значения свободного параметра, при котором выполняется второе краевое условие.

Обращаясь к случаю $s_0 \leqslant s_*$, отметим, что уравнение (IV.91) при s, близких к s_*, имеет вид

$$2A_1 d^2\sigma^n/d\xi^2 + \xi d\sigma/d\xi = 0, \qquad \text{(IV.93)}$$

где $\sigma = s - s_*$; $\Phi(s) \approx A_1 (s - s_*)^n$, если $s \to s_*$. Для всех реальных кривых относительной проницаемости и капиллярного давления $n > 1$. Как было показано в § 5 гл. II, решение уравнения вида (IV.93) достигает граничного значения $\sigma = 0$ при конечном значении $\xi = c$. В данном случае это означает, что существует «фронт пропитки».

Вблизи точки $\xi = c$, $\sigma = 0$ решение уравнения (IV.93) асимптотически представляется в виде

$$c - \xi = 2A_1 n \int_0^{\sigma} x^{n-1} (2c_1 + c_x)^{-1} dx. \qquad \text{(IV.94)}$$

Если $s_0 < s_*$, то на фронте пропитки, как и выше, в случае стабилизированной зоны, возникает скачок насыщенности от s_0 до s_* в точке $\xi = c$. Физический смысл этого скачка тот же, что и скачка впереди стабилизированной зоны. На скачке должно выполняться условие (IV.36). Из формул (IV.89) и (IV.94) получим для u_1 ($\xi = c$) выражение

$$u_1 = (am\Phi'(s)/\sqrt{t})\, ds/d\xi = amc_1/\sqrt{t}. \qquad \text{(IV.95)}$$

Из условия на скачке $V = u_1/m\,(s_* - s_0) = ac/2\sqrt{t}$, откуда

$$2c_1 = c\,(s_* - s_0). \qquad \text{(IV.96)}$$

Тогда из (IV.94) имеем

$$c - \xi = 2c^{-1} (s - s_*)^n/(s_* - s_0), \qquad \text{(IV.97)}$$

$$c - \xi = \frac{2n}{(n-1)c} (s - s_*)^{n-1} \quad (s_0 = s_*). \qquad \text{(IV.98)}$$

Соотношения (IV.97) и (IV.98) позволяют выделить из семейства интегральных кривых, удовлетворяющих условию при $\xi = 0$, те, которые соответствуют заданному значению $s_0 < s_*$.

РИС. 47. Распределение насыщенности при противоточной капиллярной пропитке

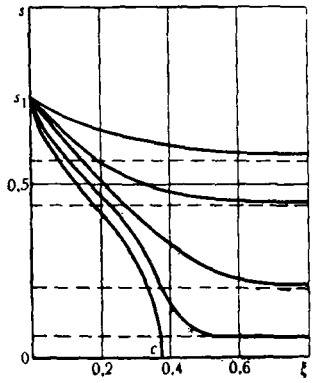
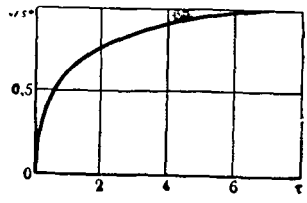


РИС. 48. Зависимость средней насыщенности от безразмерного времени при противоточной капиллярной пропитке



Заметим, что при $s_0 = s_*$ вблизи $\xi = c$ $u_1 \approx amc\sigma/2\sqrt{t}$, т. е. «истинная» скорость впитывающейся фазы $u_1/m\sigma$ при $\sigma \to 0$ остается конечной.

В задачах двухфазной фильтрации в трещиновато-пористых средах (см. ниже) используется функция, выражающая зависимость средней насыщенности пропитывающего блока пористой среды от времени. Чтобы получить эту зависимость, следует решить задачу о пропитке образца конечной длины. Если начальная насыщенность $s_0 \leqslant s_*$, скорость «фронта пропитки» x_c конечна, то до подхода его к непроницаемой границе $x = L$ можно использовать автомодельное решение $s(\xi)$. При этом средняя насыщенность

$$\bar{s} = \frac{1}{L}\int_0^{x_c} s\,dx = s_0 + K\sqrt{\tau} \quad (\tau \leqslant c^{-2}), \tag{IV.99}$$

где

$$K(s^0, s_0) = \int_0^c (s - s_0)\,d\xi. \tag{IV.100}$$

Чтобы получить приближенное решение для моментов времени $t > t_c$, воспользуемся методом интегральных соотношений. Проинтегрировав уравнение (IV.91) по x от 0 до L, получим

$$a^2\Phi'(s^0)(ds/dx)_0 = L\,d\bar{s}/dt. \tag{IV.101}$$

Будем искать распределение s в виде (с учетом условия при $x = L$):

$$s = s^0 - 2x(2L - x)(s^0 - \bar{s})/3L^2. \tag{IV.102}$$

Тогда из (IV.101) получим

$$d\bar{s}/dt = 3a^2\Phi'(s_0)(s^0 - \bar{s})/L^2. \tag{IV.103}$$

Интегрируя уравнение (IV.103) при условии, что $t = t_c$ и решение совпадает с (IV.99), получим окончательно

$$\bar{s} = s^0 - (s^0 - s_0 - K/c)\exp[-3\Phi'(s^0)(\tau - \tau_c)] \tag{IV.104}$$

при $\tau > \tau_c = c^{-2}$, где $\tau = a^2t/L^2$. Зависимость $\bar{s}(\tau)$, соответствующая формулам (IV.99) и (IV.104), приведена на рис. 48.

Модель вытеснения в средах с двойной пористостью. Полученные ранее соотношения, характеризующие капиллярную пропитку, используются для построения модели вытеснения нефти водой в средах с двойной пористостью, т. е. состоящих из областей с проницаемостью k_1, в которых имеются включения с проницаемостью $k_2 \ll k_1$. При движении вытесняющей воды по водопроницаемым зонам малопроницаемые блоки оказываются окруженными водой, и нефть из них извлекается путем противоточной капиллярной пропитки.

Ограничимся здесь только случаем трещиновато-пористых сред, общая характеристика которых приведена в § 4 гл. III, и воспользуемся гипотезами модели фильтрации в трещиновато-по-

ристых средах (см. рис. 34). Иначе говоря, предположим, что емкость трещин намного меньше пористости блоков, а проницаемость блоков, напротив, пренебрежимо мала по сравнению с проницаемостью системы трещин. Вода движется по системе трещин, впитывается в пористые блоки, вытесняя нефть. Поступающая из блоков нефть движется далее по системе трещин.

Пренебрегая непосредственным переносом жидкости по блокам и емкостью трещин, уравнения неразрывности в каждой из систем двойной среды можно получить в виде

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}_1 + q = 0, \quad m\partial s/\partial t - q = 0, \tag{IV.105}$$

где $\boldsymbol{u}_1$ — скорость фильтрации вытесняющей фазы; s — насыщенность в блоках; q — интенсивность обмена жидкостью между трещинами и блоками, определяемая скоростью капиллярной пропитки.

В принятой модели с момента подхода воды к блоку на его границе мгновенно устанавливается максимальное значение насыщенности s^*, соответствующее $P_c = 0$. Тогда интенсивность пропитки и обмена жидкостью между фазами зависит только от времени нахождения данного элемента или блока в обводненной зоне.

В одномерном случае система (IV.105) примет вид

$$\partial u_1/\partial x + q = 0, \quad m\partial s/\partial t - q = 0. \tag{IV.106}$$

Введем, следуя Ю. П. Желтову, В. Л. Данилову и А. А. Боксерману, неизвестную функцию $t_0(x)$ — время прохождения фронта воды в трещинах через точку с координатой x. Тогда интенсивность перетоков q в уравнениях (IV.108) будет функцией времени нахождения блока в зоне за фронтом $t - t_0(x) = \tau$. Вид функции $q(\tau)$ может быть установлен, например, исходя из выражения для пропитки одного элемента (IV.104). $q(\tau)$ должно быть пропорционально $d\bar{s}/d\tau$, т. е.

$$\begin{aligned} q &= N_1 (t_*\tau)^{-1/2}, \quad \tau < \tau_c; \\ q &= (N_2 a^2/L^2) \exp(-\lambda\tau/t_*), \quad \tau > \tau_c, \end{aligned} \tag{IV.107}$$

где N_1, N_2 и λ — постоянные.

Выражение (IV.107) получено из приближенной формулы (IV.104). Более удобно использовать для $q(\tau)$ единую аппроксимацию для всех τ, например, предложенную Э. В. Скворцовым, формулу

$$q(\tau) = A e^{-b\tau}/\sqrt{\tau}. \tag{IV.108}$$

Постоянные A и b подбираются так, чтобы ближе соответствовать формулам (IV.107) или экспериментальным данным.

Рассмотрим одномерную задачу вытеснения нефти водой из трещиновато-пористой среды для модели, описываемой системой (IV.106). Проинтегрируем первое из этих уравнений от $x = 0$ до фронта воды $x = x_0(t) = f(t)$.

$$u_1(t) = \int_0^{x_0(t)} q[t - T(x)]\,dx = \int_0^t q(t - T) f'(T)\,dT. \tag{IV.109}$$

Если задана скорость вытеснения при $x = 0$ $u_1(t)$, то, решая интегральное уравнение (IV.109), можно найти скорость продвижения фронта $f(t)$ и обратную функцию $t_0(x)$.

Тогда из второго уравнения системы (IV.106) найдется распределение насыщенности в блоках

$$s - s_0 = \frac{1}{m} \int_0^{t-T(x)} q(\tau)\, d\tau. \qquad \text{(IV.110)}$$

Правая часть уравнения (IV.109) имеет вид свертки, и оно может быть решено методом преобразования Лапласа. Пусть $U(\lambda)$, $Q(\lambda)$ и $\Psi(\lambda)$ — преобразования Лапласа функций $u_1(t)$, $q(t)$ и $f(t)$ соответственно. Тогда из (IV.109) получим, пользуясь теоремой о свертке и условием $f(0) = 0$,

$$\Psi(\lambda) = U(\lambda)/\lambda Q(\lambda). \qquad \text{(IV.111)}$$

Пусть $q(t)$ выражается формулой (IV.108) и $u = u_0 = \text{const}$ Тогда

$$\Psi(\lambda) = u_0 \sqrt{\lambda + b}/A \sqrt{\pi}\lambda^2. \qquad \text{(IV.112)}$$

В результате по таблицам преобразования Лапласа можно найти

$$f(t) = (u_0/A\sqrt{\pi})(1 + 2bt)\operatorname{erf}(\sqrt{bt}) + (2u_0/A\sqrt{\pi b})(1 + e^{-bt}), \qquad \text{(IV.113)}$$

$$f'(t) = (2u_0\sqrt{b}/A\sqrt{\pi})\operatorname{erf}(\sqrt{bt}). \qquad \text{(IV.114)}$$

Из формулы (IV.114) следует, что при $t \to \infty$ скорость перемещения фронта

$$V = 2u_0\sqrt{b}/A\sqrt{\pi}. \qquad \text{(IV.115)}$$

Если $f'(t) = V = \text{const}$, то в соответствии с формулой (IV.110) получим

$$s = s_0 + (s^0 - s_0)\operatorname{erf}(\sqrt{b(t - x/V)}). \qquad \text{(IV.116)}$$

Таким образом, s есть функция $x - Vt$, т. е. при $t \to \infty$ распределение насыщенности приобретает вид бегущей волны.

Все изменение насыщенности от s_0 до s^0 происходит в зоне, перемещающейся с постоянной скоростью, протяженность которой имеет порядок $u_0 l^2/a^2$. Эта зона по аналогии с рассмотренной выше зоной вблизи скачка при обычном вытеснении получила название стабилизированной. Однако в отличие от зоны, описываемой уравнениями (IV.71) или (IV.72), протяженность стабилизированной зоны пропорциональна u_0, а не u_0^{-1}. Для трещиновато-пористой среды капиллярные силы оказывают стабилизирующее влияние на процесс вытеснения. В случае однородной среды капиллярные силы вызывают диссипацию («размазывание») фронта вытеснения (см. § 4 данной главы).

§ 4. Неравновесные эффекты при двухфазной фильтрации

Неравновесность распределения фаз в пористой среде. Как уже говорилось, в основе классической теории двухфазной фильтрации лежит представление о том, что распределение фаз в элементарном макрообъеме порового пространства (а потому и гидродинамические характеристики — капиллярное давление и фазовые проницаемости) полностью определено, если известно локальное значение насыщенности s. Физический смысл этого заключается в том, что из всех возможных распределений фаз реализуется термодинамически наиболее выгодное (т. е. равновесное). Установление равновесного распределения фаз, однако, требует определенного времени. Это время зависит от того, что̀ реально понимается под «элементарным макрообъемом» — той предельной степенью дискретизации, которая допускается в теории фильтрации. Ограничимся в рассуждениях лишь наиболее простым случаем, когда речь идет о двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей — воды и нефти, а термодинамическое равновесие, по существу, равновесие капиллярное; тогда на основе результатов § 3 данной главы имеем оценку для времени установления

$$\tau \simeq \mu l^2/k\Delta p_c \simeq C\mu l^2 k^{-1/2}/\alpha, \qquad \text{(IV.117)}$$

где k — проницаемость элемента неоднородности среды; l — его линейный размер; Δp_c — действующая разность капиллярных давлений. Задавая масштаб осреднения λ при описании двухфазного течения, мы тем самым неявно устанавливаем и характерный масштаб времени, отделяющий «медленные» процессы двухфазного течения, к которым применима классическая теория вытеснения, от «быстрых», на которые могут существенно влиять неравновесные процессы. Практическая значимость неравновесных эффектов определяется тем обстоятельством, что реальный масштаб осреднения в задачах разработки нефтяных месторождений сопоставим с расстоянием между скважинами и составляет, по крайней мере, десятки метров. Соответствующие времена установления равновесия τ измеряются годами. Поэтому неравномерность фильтрации будет существенно влиять на показатели разработки, и важно знать возможные последствия такого влияния.

Есть другая — чисто теоретическая — необходимость анализа неравновесных эффектов. Действительно, согласно классической теории, в потоке имеются области резкого изменения насыщенности — фронты вытеснения. Толщина фронтов (см. § 3 данной главы) уменьшается с ростом скорости вытеснения, и при этом увеличивается скорость изменения во времени насыщенности внутри фронтов. Это означает, что с увеличением скорости вытеснения обязательно наступит момент, когда характерное время изменения насыщенности станет сопоставимым с временем установления «внутреннего» капиллярного равновесия. При больших скоростях класси-

ческая теория становится неприменимой, и следует учитывать эффекты неравновесности.

Модель неравновесной двухфазной фильтрации. Основные эффекты неравновесности ясно обнаруживаются при анализе простейшей модели [5]. Рассмотрим процесс вытеснения несмачивающей жидкости смачивающей из гидрофильной пористой среды. В стационарном потоке каналы, по которым перемещаются фазы, различные: по более узким перемещается смачивающая фаза, по более широким — несмачивающая. По мере возрастания насыщенности смачивающей фазой ей предстоит вытеснить несмачивающую из части занятых ею каналов (наиболее узких). Это происходит не мгновенно, и на промежуточном этапе часть вытесняемой фазы задерживается в узких каналах, а часть вытесняющей временно движется по более широким, чем в стационарном потоке, каналам. Поэтому фазовая проницаемость для вытесняющей фазы временно выше, а для вытесняемой — временно ниже, чем в стационарном потоке при той же насыщенности. (Для простоты ограничимся крупномасштабным анализом без учета капиллярного давления).

Существенно, что фактически речь идет не обязательно о каналах в масштабах отдельных пор, а о каналах, образующихся в реальной пористой среде с присущей ей неоднородностью разных масштабов.

Из вида кривых относительных проницаемостей (см. рис. 37) ясно, что увеличение фазовой проницаемости вытесняющей жидкости в нестационарном потоке эквивалентно как бы мгновенному установлению стационарной фазовой проницаемости, отвечающей некоторой увеличенной по сравнению с действительной насыщенности.

Аналогично уменьшение в нестационарном потоке фазовой проницаемости для вытесняемой жидкости эквивалентно как бы мгновенному установлению стационарного значения, соответствующего увеличенному значению насыщенности вытесняющей жидкостью. Пренебрегая возможным различием между «эффективным увеличением насыщенности» для обеих фаз, примем следующую гипотезу.

При нестационарной фильтрации несмешивающихся жидкостей неравновесные фазовые проницаемости при насыщенности s равны фазовым проницаемостям при некоторой эффективной насыщенности $\tilde{s}$.

Гипотезой здесь, конечно, является лишь то, что эффективная насыщенность $\tilde{s}$ одинакова для обеих фазовых проницаемостей.

С учетом сказанного основные уравнения движения записываются в виде

$$ms_{,t} + \nabla \boldsymbol{u}_1 = 0, \quad -ms_{,t} + \nabla \boldsymbol{u}_2 = 0, \tag{IV.118}$$

$$\boldsymbol{u}_i = -(k/\mu_2) f_i(\tilde{s}) \nabla p_i. \tag{IV.119}$$

Чтобы замкнуть эту систему, необходимо связать эффективную насыщенность $\tilde{s}$ с истинной насыщенностью s. Естественно предпо-

ложить, что отличие $\tilde{s}$ от s определяется локальной скоростью изменения насыщенности s_t и характерным для данной среды временем установления равновесия τ. Тогда, используя соображения размерности, получим:

$$\tilde{s} - s = \Phi(\tau s_{,t}), \tag{IV.120}$$

где Φ — неотрицательная при положительных значениях аргумента функция, причем, очевидно, $\Phi(0) = 0$. Ограничиваясь линейным разложением функции Φ и полагая коэффициент разложения равным единице (это эквивалентно переопределению времени τ, определенного лишь с точностью до порядка), положим окончательно

$$\tilde{s} - s = \tau s_{,t}. \tag{IV.121}$$

В рассматриваемой упрощенной модели будем считать τ постоянной величиной.

Соотношения (IV.118), (IV.119) и (IV.121) можно, как и в классической теории, привести к системе двух уравнений для насыщенности s и полной скорости фильтрации $\boldsymbol{U}$:

$$ms_{,t} + \nabla[\boldsymbol{U}F(s + \tau s_{,t})] = 0; \quad \nabla \boldsymbol{U} = 0. \tag{IV.122}$$

Существенно, что первое уравнение системы (IV.122) уже не разрешено относительно производной по времени.

Стабилизированная зона. Произведем асимптотический анализ решений системы (IV.122) по аналогии с анализом, данным в § 3 настоящей главы. В результате получим решение, описывающее стабилизированную зону, но иной физической природы. Перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{gathered} \vartheta = t/t_1, \ \xi = x/L, \ s, \ V = U/U_1, \\ t_1 = \mu_1 L^2/k\Delta p, \ U_1 = k\Delta p/\mu_1 L, \end{gathered} \tag{IV.123}$$

если задано давление на границе области движения; $t_1 = L/U_1$, $U_1 = U_0$, если задана нормальная компонента полной скорости фильтрации на границе. Здесь Δp — характерный перепад давления на границе; U_0 — характерная скорость на границе; L — характерный размер области. Уравнения (IV.122) принимают вид

$$ms_{,\vartheta} + \nabla[\boldsymbol{V}F(s + \varepsilon_1 s, \vartheta)] = 0, \ \nabla \boldsymbol{V} = 0, \ \varepsilon_1 = \tau/t_1. \tag{IV.124}$$

Проведем асимптотический анализ системы (IV.124) в предположении, что параметр ε_1 мал. При этом для внешнего решения получаем ту же задачу, что и в § 2 данной главы, определяющую прежний вид решения с поверхностями разрыва насыщенности. Неравновесность скажется только на внутреннем решении. Область быстрого изменения насыщенности представляет собой тонкий пограничный слой вблизи поверхности разрыва насыщенности внешнего решения. Вновь введем локальную декартову систему координат с началом в произвольной точке поверхности разрыва Σ внешнего решения и осью ζ, направленной по нормали к Σ. Вве-

дем новую единицу длины $\varepsilon_1 L$ по оси ζ, оставив масштаб по другим осям равным L, и «быстрое» время $\theta = \vartheta/\varepsilon_1$. Тогда производные по ζ будут иметь порядок единицы, а производные по остальным пространственным переменным — ε_1.

В нулевом приближении по ε_1 получаем из (IV.124) уравнения

$$ms_{,\theta} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[V_\zeta F\left(s + \frac{\partial s}{\partial j}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial V_\zeta}{\partial \zeta} = 0. \qquad \text{(IV.125)}$$

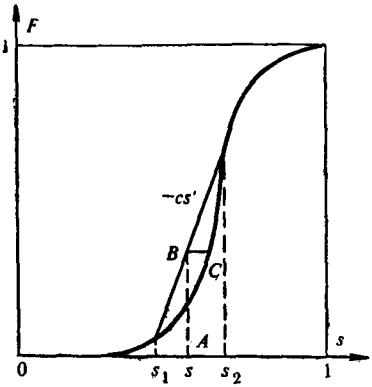


РИС. 49. К исследованию уравнения (IV.129)

Для нахождения в нулевом приближении структуры фронта ищем вновь решение системы (IV.125) в виде бегущей волны:

$$s = s(\xi),\ V_\zeta = V_\zeta(\xi),\ \xi = \zeta - c\theta. \qquad \text{(IV.126)}$$

Из второго уравнения (IV.125) получим $V_\zeta = \text{const} = V$, причем V определяется из внешнего решения. Подставляя (IV.126) в (IV.125) и интегрируя, находим

$$-mcs + VF(s - cs) = \text{const}. \qquad \text{(IV.127)}$$

Граничные условия имеют вид $s(-\infty) = s_2$, $s(\infty) = s_1$, где s_1, s_2 берутся из нулевого приближения внешнего решения, т. е. в одномерном случае — из решения Баклея — Леверетта. При $\zeta = \pm\infty$ $\dot{s} = 0$, так что из (IV.127) следует

$$\text{const} = -mcs_2 + VF(s_2);\ c = \frac{V}{m}\frac{F(s_2) - F(s_1)}{s_2 - s_1}. \qquad \text{(IV.128)}$$

Подставляя это выражение в уравнение (IV.127), получим:

$$F(s - cs) = F(s_2) + (s - s_2)\frac{F(s_2) - F(s_1)}{s_2 - s_1}. \qquad \text{(IV.129)}$$

Это уравнение легко исследуется графически (рис. 49). Отрезок AB соответствует правой части уравнения (IV.129); отсюда следует, что отрезок BC соответствует $-cds/d\xi$. Таким образом, при изменении s от s_2 до s_1 величина $-cds/d\xi$ все время остается положительной; она обращается в нуль по краям интервала и имеет один максимум.

Перепишем уравнение (IV.129) в виде

$$c\frac{ds}{d\xi} = s - \chi\left\{F(s_2) - \frac{F(s_2) - F(s_1)}{s_2 - s_1}(s_2 - s)\right\}, \qquad \text{(IV.130)}$$

где χ — функция, обратная F, очевидно, она определена и монотонно возрастает на отрезке $[0, 1]$; правая часть уравнения (IV.130)

обращается в нуль по концам интервала $[s_1, s_2]$ и положительна внутри него. Интегрируя уравнения (IV.130), получим

$$\xi = \frac{V}{m}\frac{F(s_2)-F(s_1)}{s_2-s_1}\int \frac{ds}{s-\chi\,[\widetilde{F}(s)]}; \quad \widetilde{F} = F(s_2) - \\ - \frac{F(s_2)-F(s_1)}{s_2-s_1}(s-s_1). \qquad \text{(IV.131)}$$

Из этого соотношения, как и в § 3 данной главы, получаем для эффективной толщины фронта вытеснения — расстояния, на котором насыщенность изменяется от $s_1+\delta$ до $s_2-\delta$,

$$\Lambda = \frac{V}{m}\frac{F(s_2)-F(s_1)}{s_2-s_1}\int_{s_1+\delta}^{s_2-\delta} \frac{ds}{s-\chi\,[\widetilde{F}(s)]}. \qquad \text{(IV.132)}$$

Таким образом, в отличие от структуры, непосредственно обусловленной влиянием капиллярного давления (стабилизированной зоны), толщина фронта вытеснения при преимущественном влиянии неравновесности прямо пропорциональна скорости вытеснения.

Заметим, что отношение малых параметров, отвечающих двум указанным физическим эффектам, равно

$$\varepsilon/\varepsilon_1 = \frac{\alpha\cos\theta\,(mk)^{1/2}}{\mu_1\tau U_1^2}. \qquad \text{(IV.133)}$$

Поэтому классическая модель, приведенная в § 3 данной главы и отвечающая $\varepsilon/\varepsilon_1 \gg 1$, справедлива при малых скоростях вытеснения, а рассмотренная в данном параграфе модель, когда $\varepsilon/\varepsilon_1 \ll 1$ (преимущественное влияние неравномерности), соответствует большим скоростям. Учитывая результаты § 3 данной главы, приходим к выводу, что зависимость толщины фронта вытеснения от скорости имеет вид немонотонной кривой, неограниченно возрастающей как при малых, так и при больших скоростях. Этот вывод согласуется с лабораторным экспериментом (см. рис. 44).

Для условий вытеснения нефти водой в нефтяном пласте $\alpha \approx$ $\approx 0{,}01$ Н/м, $m \approx 0{,}1$; $k \approx 10^{-13}$ м^2, $\mu_1 \approx 10^{-3}$ Па·с. Тогда $\varepsilon/\varepsilon_1 \sim$ $\sim (10^6 - 10^7)/\tau$, где τ — характерное время установления равновесия в секундах. Если учесть, что это время, как показывают оценки, может быть весьма велико — до года и более, то в обычных условиях основную роль играют эффекты неравновесности. Поэтому в промысловых условиях толщина фронта должна расти с ростом скорости вытеснения, и в конце концов может стать сопоставимой по размерам с размерами пласта.

Эти выводы, полученные здесь на простейшей модели неравновесности, имеют общий характер. Из них следует существенность неравновесных процессов при разработке нефтяных месторождений и необходимость их изучения и учета при проектировании разработки.

§ 5. Устойчивость вытеснения несмешивающихся жидкостей

Для того, чтобы реально осуществлялись движения, описываемые приведенными выше решениями уравнений двухфазной фильтрации, они должны быть устойчивы, по крайней мере, к малым возмущениям. Возмущения, связанные с неоднородностью среды и непостоянством скорости фильтрации, всегда возникают при течении жидкостей в реальных пористых средах. Они могут быть немалыми, тогда устойчивость к малым возмущениям есть необходимое, но не достаточное требование.

1. При исследовании устойчивости решения Баклея — Леверетта в крупномасштабном приближении нужно ограничиваться возмущениями, длина волны которых (кривизна фронта скачка) велика по сравнению с толщиной стабилизированной переходной зоны. Рассмотрим устойчивость плоскопараллельного вертикального вытеснения несмешивающихся жидкостей с учетом силы тяжести. Уравнения двухфазной фильтрации в крупномасштабном приближении запишем в виде

$$\boldsymbol{u}_j = -(kf_j(s)/\mu_j)\operatorname{grad}(p + \rho_j g x),\ j = 1,\ 2, \tag{IV.134}$$

$$m\partial s/\partial t + \operatorname{div}\boldsymbol{u}_1 = 0;\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0;\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2. \tag{IV.135}$$

Компоненты векторов $\boldsymbol{u}$ по ссям x, y, z обозначим u_j, v_j, w_j. Ось x направлена вертикально вверх.

Течением, устойчивость которого исследуется, является плоскопараллельное движение вдоль оси x с постоянной скоростью фильтрации $u_0 = u_{10} + u_{20}$. Позади и впереди скачка, движущегося со скоростью V, насыщенность постоянна и равна соответственно $s^- = s_c$, $s^+ = s_0$. При этом выполняются соотношения (см. § 2 данной главы):

$$V = u_0(\psi_c - \psi_0)/m(s_c - s_0), \tag{IV.136}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10}^- = u_0\psi_c,\ \zeta < 0, \\ u_1 &= u_{10}^+ = u_0\psi_0,\ \zeta > 0, \end{aligned} \tag{IV.137}$$

где $\psi_c = \psi(s_c)$; $\psi_0 = \psi(s_0)$; $\psi(s) = F(s)[1 - Wf_2(s)/u_0]$; $W = k\Delta\rho g/\mu_2$;

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2,\quad \zeta = x - Vt.$$

Распределение давления описывается соотношениями, вытекающими из уравнений (IV.134) и непрерывности давления на скачке

$$\begin{aligned} p_0^- &= -(\mu_1/k)(u_0/\varphi_c + WF_c)\zeta + \rho_2 g\zeta + P_0,\ (\zeta < 0), \\ p_0^+ &= -(\mu_1/k)(u_0/\varphi_0 + WF_0)\zeta + \rho_2 g\zeta + P_0,\ (\zeta > 0), \end{aligned} \tag{IV.138}$$

где $\varphi_c = \varphi(s_c)$; $\varphi_0 = \varphi(s_0)$; $F_c = F(s_c)$; $F_0 = F(s_0)$; $P_0 = \text{const}$; $\varphi(s) = f_1(s) + \mu_0 f_2(s)$, $\mu_0 = \mu_1/\mu_2$.

Рассмотрим решение уравнений (IV.134) и (IV.135), отличающееся от описываемого соотношениями (IV.136)—(IV.138) малыми возмущениями всех переменных, кроме насыщенности, т. е. положим

$$\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_{j0} + \varepsilon \boldsymbol{u}_j^*, \quad p = p_0 + \varepsilon p^*, \quad j = 1, 2. \tag{IV.139}$$

Здесь ε — малая величина; вектор $\boldsymbol{u}_j^*$ имеет компоненты u_j^*, v_j^*, w_j^*. Уравнение возмущенного фронта скачка примем в виде

$$\zeta_c = x_c - Vt = \varepsilon x^*(y, z, t). \tag{IV.140}$$

Подставляя выражения (IV.139) в уравнения (IV.134) и (IV.135), получим, что в первом приближении по ε возмущения (величины, обозначенные звездочкой) удовлетворяют системе уравнений

$$\boldsymbol{u}_j^* = -(kf_j(s_c)/\mu_j)\operatorname{grad} p^*, \quad \zeta < 0, \quad j = 1, 2 \tag{IV.141}$$

$$\boldsymbol{u}_j^* = -(kf_j(s_0)/\mu_j)\operatorname{grad} p^*, \quad \zeta > 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}^* = 0. \tag{IV.142}$$

Поскольку искажения фронта малы, условия на скачке можно снести на плоскость ζ. Тогда с точностью до малых величин порядка ε получим условия для возмущений при $\zeta = 0$:

$$u_1^{*-} - u_1^{*+} = m(s_c - s_0)\,\partial x^*/\partial t. \tag{IV.143}$$

$$u_1^{*-} + u_2^{*-} = u_1^{*+} + u_2^{*+} = u^*, \tag{IV.144}$$

$$p^{*-} - p^{*+} = \mu_1/k\,[1/\varphi_c - 1/\varphi_0)\,u_0 + W(2 - F_0 - F_c)]\,x^*. \tag{IV.145}$$

Кроме того, возмущения должны обращаться в нуль при $\zeta \to \pm\infty$.

Произвольное возмущение фронта скачка может быть разложено в интеграл Фурье по y и z. Поэтому для исследования устойчивости достаточно рассмотреть развитие синусоидального возмущения, которое выразим в комплексной форме

$$x^* = X(t)\exp(i\beta_1 y + i\beta_2 z). \tag{IV.146}$$

Тогда нетрудно показать, что возмущение давления p^*, удовлетворяющее уравнениям (IV.141) и (IV.142) и стремящееся к нулю при $\zeta \to \pm\infty$, должно выражаться в виде

$$p^{*\mp} = P^{\mp}(t)\exp(i\beta_1 y + i\beta_2 z \pm \beta\zeta). \tag{IV.147}$$

где $\beta = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$. Возмущения скоростей фильтрации получаются из (IV.147) и уравнения (IV.141).

Используя условия (IV.143)—(IV.145) и исключая $P^{\mp}(t)$, получим уравнение, описывающее изменение амплитуды произвольного синусоидального возмущения:

$$dX/dt = -N\beta X/m(s_c - s_0)\,(\varphi_c^{-1} + \varphi_0^{-1}), \tag{IV.148}$$

где

$$N = (1/\varphi_c - 1/\varphi_0)\,u_0 + W(2 - F_0 - F_c).$$

Решение уравнения (IV.148) при условии $X(0) = X_0$

$$X = X_0 \exp[-N\beta t/m(s_c - s_0)\,(1/\varphi_c + 1/\varphi_0)]. \tag{IV.149}$$

Таким образом, если

$$N = (1/\varphi_c - 1/\varphi_0)\, u_0 + W(2 - F_0 - F_c) > 0, \qquad \text{(IV.150)}$$

то начальные малые возмущения со временем затухают, в противном же случае возрастают. Поскольку в условие (IV.150) не входит волновое число β, то оно справедливо для малых начальных возмущений произвольной формы.

Условие устойчивости (IV.150) получено без учета возмущений насыщенности. Можно показать, что малые возмущения насыщенности распространяются, не затухая и не разрастаясь, и поэтому не меняют вида условия устойчивости.

Величину $k\varphi(s)/\mu_1$ принято называть подвижностью фильтрующейся двухфазной жидкости, функцию $\varphi(s) = f_1(s) + \mu_0 f_2(s)$ — относительной подвижностью. Условие (IV.150) означает, что при $W = 0$ (без влияния силы тяжести) фронт вытеснения устойчив, если подвижность вытесняющей жидкости за фронтом φ_c меньше, чем подвижность вытесняемой фазы впереди него. Если $W > 0$, т. е. плотность вытесняющей жидкости больше, чем вытесняемой, а вытеснение происходит снизу вверх, то действие силы тяжести способствует стабилизации фронта, и наоборот. Условие (IV.150) было получено впервые И. А. Чарным несколько иным путем.

Отношение подвижностей на скачке $M^* = \varphi_0/\varphi_c$ зависит от вида кривых относительной проницаемости и отношения вязкостей фаз $M = \mu_2/\mu_1 = 1/\mu_0$. С ростом M отношение подвижностей M^* также растет, но критическое значение $M^* = 1$ достигается при $M = M_{кр}$, обычно превышающем единицу.

Например, если относительные проницаемости имеют вид:

$$f_1(s) = (s - s_*)^2/(1 - s_*)^2;\ f_2(s) = (s^* - s)^2/s^{*2}, \qquad (f_1 \equiv 0 \text{ при } s < s_*,\ f_2 \equiv 0 \text{ при } s > s^*), \qquad \text{(IV.151)}$$

а $s_0 = s_*$, то из формулы (IV.45) нетрудно получить

$$s_c = s_* + (s^* - s_*)(M_1 + 1)^{-1/2};\ M^* = 2[1 - (M_1 + 1)^{-1/2}],$$
$$M_1 = Ms^{*2}/(1 - s_*)^2.$$

Заметим, что если $s^* = 1 - s_*$, то $M_1 = M$. Отношение подвижностей M^* равно единице при $M_1 = 3$. Таким образом, для квадратичных относительных проницаемостей вытеснение устойчиво при $M_1 < 3$ и неустойчиво при $M_1 > 3$.

Если относительные проницаемости выражаются в виде кубических функций соответствующих насыщенностей, то критическое значение отношения вязкости составляет около 9,8, а если в виде четвертых степеней — то около 18,3.

2. Условие устойчивости (IV. 150) было получено без учета капиллярных сил. Капиллярные силы, обладающие диссипативным действием на распределение насыщенности, способствуют стабилизации фронта вытеснения. Точное исследование их влияния на устойчивость аналитическим путем провести не удается. Здесь

даны результаты асимптотического исследования при принятом выше условии, что длина волны возмущения велика по сравнению с протяженностью переходной (стабилизированной) зоны. Действие капиллярных сил в таком приближении учитывается в граничных условиях на скачке.

Чтобы избежать громоздких выкладок, рассмотрим течение без учета сил гравитации, описываемое системами уравнений (IV.19) и (IV.20). Второе из этих уравнений запишем в виде

$$m\partial s/\partial t + F'(s)(\boldsymbol{u}\ \mathrm{grad}\, s) - a^2 m\Delta\Phi(s) = 0. \qquad \text{(IV.152)}$$

Пусть невозмущенное движение направлено вдоль оси x и описывается (IV.136)—(IV.138).

При этом положим $\mathbb{W} = 0$, откуда $\psi(s) \equiv F(s)$. Определим возмущения скоростей и давления формулами (IV.139). В линейном приближении относительно ε возмущения по обе стороны фронта удовлетворяют уравнениям (IV.141) и (IV.142). Чтобы получить для них граничные условия, проинтегрируем уравнения (IV.19) и (IV.152) по x вдоль переходной зоны, считая, что граница раздела слабо искривлена. При этом пренебрегаем членами порядка ширины зоны и квадратами производных по y и z. Переходя в полученных выражениях к возмущениям, снова получим условия (IV.144) и (IV.145). Однако вместо (IV.143) из уравнения (IV.152) следует

$$\partial x^*/\partial t - u^* V/u_0 - a^2[(\Phi_c - \Phi_0)/(s_c - s_0)](\partial^2 x^*/\partial y^2 + \partial^2 x^*/\partial z^2) = 0$$

$$(\Phi_c = \Phi(s_c),\ \Phi_0 = \Phi(s_0)). \qquad \text{(IV.153)}$$

x^* и p^{*-} по-прежнему выражаются формулами (IV.146) и (IV.147). Условия (IV.144), (IV.145) при $\mathbb{W} = 0$ и (IV.153) приводят к следующему уравнению для $X(t)$:

$$dX/dt + \beta X[V(1 - M^*)/(1 + M^*) + a^2\beta(\Phi_c - \Phi_0)/(s^c - s_0)] = 0. \qquad \text{(IV.154)}$$

Из уравнения (IV.154) следует условие устойчивости

$$V(1 - M^*)/(1 + M^*) + a^2\beta(\Phi_c - \Phi_c)/(s_c - s_0) > 0. \qquad \text{(IV.155)}$$

Условие (IV.155) совпадает с (IV.150), если отсутствуют капиллярные и гравитационные силы. При $M^* > 1$, когда без воздействия капиллярных сил фронт скачка неустойчив, они обеспечивают устойчивость возмущений, длина волны которых меньше критического значения λ_c, определяемого, в соответствии с условием (IV.155), формулой

$$\lambda_c = 2\pi/\beta_c = [2\pi a^2(\Phi_c - \Phi_0)/V(s_c - s_0)](M^* + 1)/(M^* - 1). \qquad \text{(IV.156)}$$

Вывод условия (IV.155) и формулы (IV.156) был сделан в предположении, что ширина переходной зоны много меньше длины волны возмущения. Согласно результатам, изложенным в § 3 настоящей главы, протяженность стабилизированной переходной зоны δl, пропорциональна a^2/V. Поэтому предположение $\lambda_c \gg \delta l$ выпол-

няется только при M^*, близком к единице, т. е. лишь вблизи границы устойчивости по параметру M^*. В общем же случае критическая длина волны возмущения λ_c, разделяющая области устойчивого и неустойчивого вытеснения, является функцией параметров a^2, V и $M = \mu_2/\mu_1$. Из соображений размерности следует

$$\lambda_c = a^2\psi(M)/V. \qquad \text{(IV.157)}$$

Вид функции $\psi(M)$ может быть получен в результате численного исследования [14].

На устойчивость фронта вытеснения влияют и неравновесные эффекты описанные в предыдущем параграфе. Они оказывают стабилизирующее влияние на мелкомасштабные (коротковолновые) возмущения в гетерогенных средах.

Нелинейная стадия развития неустойчивости. Приведенный нелинейный анализ устойчивости указывает на возможность возникновения экспоненциально разрастающихся при малых временах искажений фронта вытеснения (скачка) при нарушении условия (IV.150) или (IV.155). Дальнейшее развитие возмущений фронта может быть исследовано методами физического или численного моделирования.

Экспериментальные исследования, проведенные в 1950—1960 гг. Саффманом и Тейлором, Чуоком и другими, показали, что развитие возмущений плоского фронта вытеснения в пористой среде при нарушении устойчивости происходит в виде неограниченно разрастающихся «языков обводнения». Эксперименты Б. Е. Кисиленко на насыпных пористых средах показали, что нарушение устойчивости происходит при отношении вязкости нефти и воды, превышающем критическое значение $M_{кр}$, находящееся в пределах 10—15. В то же время при малых скоростях вытеснения возмущения затухают даже при отношениях вязкостей больших критического, что согласуется с условием (IV.155).

Искажение фронта вытеснения нефти водой приводит к снижению нефтеотдачи и росту обводненности, что обусловливает практическую важность изучения неустойчивости вытеснения.

Единственным методом теоретического исследования нелинейного развития возмущений при нарушении устойчивости остается численное моделирование, начатое в работах Рэчфорда и позже М. И. Швидлера, Р. М. Каца, П. В. Индельмана.

Приведем некоторые результаты численных расчетов неустойчивого вытеснения, выполненых В. М. Ентовым и В. Б. Таранчуком.

Моделировалось вытеснение без учета капиллярных и гравитационных сил в плоской прямолинейной области между двумя галереями с заданным расходом q_0 на входной галерее $x = 0$. Относительные проницаемости задавались в виде (IV.151) при $s_* = 0$, $s^* = 1$, чему соответствует критическое отношение вязкостей $M_{кр} = 3$.

На входе формировалось малое синусоидальное возмущение фронта с амплитудой x_0 и длиной волны L, а затем прослеживалась его эволюция. Было установлено, что справедливо условие устойчивости (IV.150), т. е. при $M < 3$ амплитуда возмущений фронта

со временем затухает, при $M > 3$ растет, при $M = 0$ — со временем не меняется.

На основе численного моделирования была получена зависимость относительной амплитуды фронта скачка X/L (L — длина волны возмущения) от безразмерного времени $\tau = tp_* k/m\mu_1 L^2$, где p_* — давление во входной галерее. Расход q_0 выбирался таким, что $q_0\mu_1 L/kp_* = 0{,}3$. Соответствующие зависимости $Z = \ln(X/L)$ от τ при различных значениях параметров приведены на рис. 50.

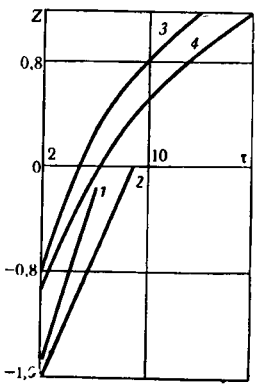
Для кривых *1* и *2* начальные амплитуды $X_0 = 0{,}05L$ (при $\tau = 2$), для кривых *3* и *4* $X_0 = 0$, $1L$.

На рис. 50 видно, что на начальном участке зависимость $Z(\tau)$ прямолинейна, что согласуется с формулой (IV.150). Угловой коэффициент прямой $Z(\tau)$ согласно формуле (IV.150) при $M = 10$ составляет 0,357, при $M = 7$ — 0,244, а при численном моделировании соответственно 0,345 и 0,249. Предсказываемый линейной теорией экспоненциальный закон роста возмущений оказывается справедливым даже для возмущений, амплитуда которых сопоставима с длиной волны. Однако при достаточно больших возмущениях экспоненциальный закон роста нарушается.

В тех случаях, когда амплитуда возмущения сравнима с длиной волны или больше нее (кривые *3* и *4* на рис. 50), заметно постепенное снижение ускорения роста возмущений и переход к режиму их равномерного роста. Этот режим соответствует изученному Саффманом и Тейлором стационарному движению языков большой протяженности относительно окружающей их вытесняемой жидкости.

Процесс вытеснения после потери устойчивости, по крайней мере, при одномерной фильтрации, происходит в виде хаотически расположенных языков. Для упрощенного описания такого процесса сделаем следующие предположения: во-первых, протяженность языков в направлении потока будем считать намного большей их ширины (рассматривается стадия развитого языкообразования); во-вторых, течение в среднем будем считать одномерным, поэтому скорость фильтрации каждой из жидкостей, осредненная по некоторому представительному сечению, направлена вдоль оси x; в-третьих, насыщенность внутри каждого «языка» принимается постоянной.

РИС. 50. Зависимость протяженности «языков» от безразмерного времени: *1* и *3* — $M = 10$; *2* и *4* — $M = 7$



При таких предположениях для осредненного течения получим обычные уравнения двухфазной фильтрации, но с относительными проницаемостями, линейно зависящими от соответствующих насыщенностей. Решение Баклея — Леверетта для линейных зависимостей f_i от s приведено в § 2 данной главы, см. (IV.155). Напомним, что при этом для $M \leqslant 1$ вытеснение оказывалось поршневым

а для $M > 1$ протяженность зоны переменной насыщенности (зоны языков) пропорциональна величине

$$X = (M^2 - 1)\, t/M. \qquad \text{(IV.158)}$$

Линейный рост языков со временем согласуется с приведенными результатами численного моделирования.

Дальнейшим обобщением осредненного описания неустойчивого вытеснения на случай неоднородных пластов является модель Хэрна, А. К. Курбанова так называемых фиктивных относительных проницаемостей. Согласно этой модели, пористая среда представляется в виде набора слоев различной проницаемости, свободно сообщающихся между собой, т. е. в одномерном потоке в каждом сечении давление (гидродинамический потенциал) предполагается постоянным. Кроме того, предполагается, что вытесняющая фаза в первую очередь занимает высокопроницаемые прослои. На основе сделанных предположений, очевидно, можно при заданной средней по сечению насыщенности вытесняющей фазой найти среднюю проницаемость для каждой фазы, т. е. определить осредненные относительные проницаемости в зависимости от средней насыщенности. Вид функций относительных проницаемостей тогда полностью определяется статистической функцией распределения проницаемости по сечению. Например, если функция распределения проницаемости $\Phi(k/k_0)$, линейна в интервале $k=0$—$-k=k_0$, т. е.

$$\Phi = 0 \ (k \leqslant 0); \quad \Phi = k/k_0 \ (0 \leqslant k \leqslant k_0); \ \Phi = 1 \ (k \geqslant k_0), \qquad \text{(IV.159)}$$

то осредненные (фиктивные) относительные проницаемости имеют вид

$$f_1 = 1 - (1 - S)^2; \ f_2 = (1 - S)^2; \ S = (s - s_*)/(s^* - s_*). \qquad \text{(IV.160)}$$

Легко убедиться, используя формулы § 2 данной главы, что при таком виде относительных проницаемостей при $M > 0{,}25\ F''(s)$ везде меньше нуля и скачок насыщенности не возникает; такая ситуация соответствует образованию развитой системы языков. При $M < 0{,}25$ образуется скачок насыщенности, интенсивность которого растет с уменьшением M, а при $M \to 0$ характер вытеснения приближается к поршневому.

§ 6. Теория вытеснения неньютоновских жидкостей. Влияние вязкопластических свойств нефти на нефтеотдачу [1]

Оценка влияния реологических аномалий на процессы разработки пласта в частности, вытеснения нефти водой,— один из центральных вопросов, который приходится решать в том случае, если нефть обладает неньютоновскими реологическими свойствами (см. гл. III). Очевидно, что если нефть обладает предельным напряжением сдвига (или вообще псевдопластична), в пласте образуются застойные зоны, которые будут обходиться потоком вытесняющей жидкости, превращаясь в так называемые целики оста-

[1] См. также [9, 19, 41].

точной нефти. Целики будут разрастаться с ростом предельного напряжения сдвига и с уменьшением интенсивности движения. Поэтому существенно заранее оценить возможные вредные последствия этого явления и принять меры к их предотвращению путем рационального выбора режима разработки.

Двухфазное течение неньютоновских жидкостей. Прежде всего обобщим теорию двухфазного течения на случай, когда обе фазы или одна из них обладают неньютоновскими свойствами. Будем считать в качестве основного допущения, что, как и при «обычной» двухфазной фильтрации, на микроуровне пористой среды капиллярные силы значительно превосходят гидродинамические (включая сюда, возможно, и силы пластического сопротивления). Иными словами, будем по-прежнему полагать, что распределение фаз в элементе пористой среды происходит под действием капиллярных сил. Сохраним и второе основное положение теории двухфазного течения, а именно, примем, что каждая из фаз движется в «своей» части порового пространства так, как если бы вторая фаза отвердела. Наконец, положим дополнительно, что для каждой из фаз при фиксированном значении насыщенности (т. е. при фиксированном распределении жидкостей по поровому пространству) справедлив принцип реологического подобия (см. § 1 гл. III). Из первых двух допущений имеем общую систему

$$\nabla p_1 = -\Phi_1(u_1, s)\,\boldsymbol{u}_1/u_1,$$
$$\nabla p_2 = -\Phi_2(u_2, s)\,\boldsymbol{u}_2/u_2,\quad p_2 - p_1 = P_c(s). \qquad \text{(IV.161)}$$

Из-за наличия двух эмпирических функций двух переменных Φ_1 и Φ_2, описывающих законы фильтрации фаз, это система мало содержательна, хотя и на ее основе можно развить теорию вытеснения по аналогии с теорией Баклея — Леверетта. Гораздо более конструктивным такой подход оказывается для вязкопластичных жидкостей и нелинейно вязких жидкостей, следующих степенному реологическому закону. Действительно, при допущении о реологическом подобии получаем для этих двух случаев, соответственно:

$$\boldsymbol{u}_i = -f_i(s)\,\mu_i^{-1} k\,[\nabla p_i - G_i(s)\,\nabla p_i/|\nabla p_i|];\ |\nabla p_2| > G_i$$
$$\boldsymbol{u}_i = 0,\ |\nabla p_i| < G_i, \qquad \text{(IV.162)}$$

$$\boldsymbol{u}_i = -\varphi_i(s)\,(\Pi^{-1}|\nabla p_i|)^{1/n_i}\,\nabla p_i/|\nabla p_i|. \qquad \text{(IV.163)}$$

В соотношении для степенной жидкости (IV.163) показатели n_i те же, что и в реологических соотношениях, и не меняются с изменением насыщенности, величина Π — масштаб градиента давления — по существу, определяется из соображений нормировки.

Здесь $f_i(s)$ и $\varphi_i(s)$ — функции, аналогичные фазовым проницаемостям обычной теории двухфазной фильтрации; они нормированы так, что при полном насыщении закон фильтрации сводится к закону фильтрации однородной неньютоновской жидкости. Поэтому

$$f_1(0) = \varphi_1(0) = 0;\ f_2(1) = \varphi_2(1) = 0;\ f_1(1) = \varphi_1(1) = 1;$$
$$f_2(0) = \varphi_2(0) = 1.$$

Более того, последовательное применение принципа преобладания капиллярных сил над гидродинамическими приводит к выводу, что при фильтрации с предельным градиентом функции $f_i(s)$ должны совпадать с обычными функциями относительных фазовых проницаемостей (отсюда и обозначение). Соотношение (IV. 162) показывает, что при любом распределении фаз по порам каждая фаза движется в соответствии со своим законом фильтрации с предельным градиентом. Переменность предельного градиента учитывает перестройку структуры порового пространства для каждой из фаз с изменением насыщенности. При этом, поскольку первой фазой мы считаем более смачивающую, средний размер пор d_i, занятых i-й фазой, возрастает с ростом насыщенности s, и потому, учитывая оценку

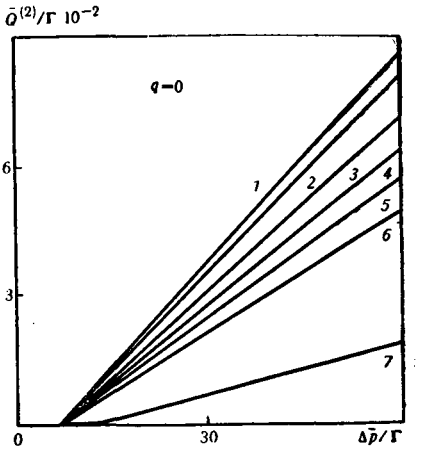


РИС. 51. Зависимость скорости фильтрации вязкопластичной жидкости от градиента давления при двухфазной фильтрации по результатам моделирования на сеточной капиллярной модели

Кривые *1*—*7* соответствуют значениям водонасыщенности $s = 0{,}006$; 0,022; 0,053; 0,297; 0,464 и 0,585

$$G_i(s) \sim \tau_{0i}/d_i(s) \qquad \text{(IV.164)}$$

(τ_{0i} — предельное напряжение сдвига i-й фазы), мы вправе ожидать падения фазового предельного градиента G_i с ростом насыщенности ($G_i'(s) \leqslant 0$).

Далее мы будем говорить исключительно о двухфазной фильтрации вязкопластичных жидкостей.

Экспериментальные данные. Последующие рассуждения целиком опираются на постулированные выше соотношения (IV. 164). Естественно, хотелось бы иметь возможность сопоставить их с экспериментом. Немногочисленные экспериментальные данные по двухфазной фильтрации системы вязкопластичная жидкость — вода, в основном, согласуются с теоретической схемой, во всяком случае, для не слишком малых скоростей фильтрации фаз. Сходную картину дает и имитационное моделирование двухфазного течения на стохастической сетке капилляров, результаты которого показаны на рис. 51. Этот чисто математический «эксперимент» показателен в том отношении, что подтверждает справедливость для каждого распределения фаз принципа реологического подобия, который приходится постулировать при выводе соотношений (IV. 169).

Фронтальное вытеснение. Рассмотрим в крупномасштабном приближении одномерное вытеснение, считая обе фазы вязкопластичными несжимаемыми жидкостями. Записывая урав-

нения неразрывности фаз и используя соотношения (IV.162), имеем

$$m\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x}=0,\quad u_1+u_2=U;$$

$$u_1=\frac{kf_1(s)}{\mu_1}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+G_1\right),\ \frac{\partial p}{\partial x}<-G_1,\quad u_1=0,\quad -G_1<\partial p/\partial x\leqslant 0. \qquad \text{(IV.165)}$$

$$u_2=-\frac{kf_2(s)}{\mu_2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+G_2\right),\ \frac{\partial p}{\partial x}<-G_2,\quad u_2=0,\quad -G_2<\partial p/\partial x\leqslant 0,$$

$$s(x,\,0)=s_0,\quad u_1(0,\,t)=U,\quad u_2(0,\,t)=0,\quad 0\leqslant x<\infty,\ 0\leqslant t<\infty.$$

Проведем обычную процедуру исключения из системы (IV.165) давления и фазовых скоростей (ограничиваясь случаем $G_2>G_1$):

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{U}{m}\frac{\partial F^*(s,\,U)}{\partial x}=0,\quad u_1=UF^*(s,\,\mu,\,U),$$

$$F^*(s,\,U)=F(s)\,[1+kf_2(s)\,(G_2-G_1)/\mu_2U],\quad U\geqslant kf_1(s)\,(G_2-G_1)/\mu_1,$$

$$F^*(s,\,U)=1,\quad U\leqslant kf_1(s)\,(G_2-G_1)/\mu_1, \qquad \text{(IV.166)}$$

$$s(0,\,t)=s_0,\quad F^*(s,\,U)\,|_{x=0}=1.\quad F(s)=f_1(s)\,[f_1(s)+\mu_1f_2(s)/\mu_2]^{-1}.$$

Таким образом, по существу, мы имеем детально изученную выше задачу Баклея — Леверетта с тем лишь отличием, что функция распределения потоков F^* зависит от суммарной скорости вытеснения U. Легко убедиться, что при $G_2>G_1$ это изменение сводится к уменьшению функции F^* с увеличением U при сохранении ее обычного вида (рис. 52):

$$\partial F/\partial U\leqslant 0,\quad \partial F/\partial s\geqslant 0,\quad F^*(s,\,\infty)=F(s). \qquad \text{(IV.167)}$$

Поэтому технологические показатели вытеснения закономерным образом зависят от скорости вытеснения, улучшаясь с ростом ее. При $U\to\infty$ рассмотренная задача переходит в задачу Баклея—Леверетта. Таким образом, наличие у вытесняемой жидкости

РИС. 52. Зависимость функции распределения потоков F^* от скорости вытеснения: $1-u=u_1$; $2-u=u_2>u_1$

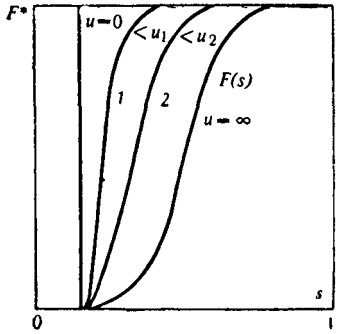
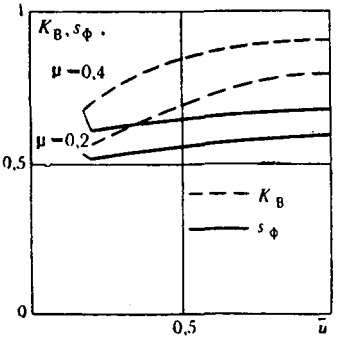


РИС. 53. Зависимость фронтовой насыщенности $s_ф$ и коэффициента вытеснения $K_в$ от скорости вытеснения для вязкопластичной нефти



пластических свойств всегда приводит к снижению показателей вытеснения по сравнению с вытеснением обычной нефти с вязкостью, равной пластической вязкости неньютоновской нефти, причем это снижение тем более выражено, чем меньше темп вытеснения (рис. 53). С практической точки зрения наиболее важным является вопрос о том, каким должен поддерживаться темп вытеснения, чтобы указанные дополнительные потери нефти не были значительными. Из рис. 53 и данных аналогичных расчетов следует, что для предотвращения значительного снижения коэффициента безводной нефтеотдачи и предельного коэффициента нефтеотдачи при вытеснении вязко-пластичной нефти водой интенсивность вытеснения, характеризуемая безразмерным параметром

$$I = U\mu_1/kG_2, \qquad \text{(IV.168)}$$

должна быть не меньше $I_* \simeq 1$. (Заметим, что с увеличением интенсивности вытеснения могут возрасти отрицательные эффекты неравновесности и неустойчивости вытеснения, так что назначение оптимального режима требует учета всей совокупности существенных факторов.)

Предельная нефтеотдача. Целики остаточной нефти. Как уже говорилось, предельное напряжение сдвига у нефти (предельный градиент давления при фильтрации нефти) приводит не только к снижению локального коэффициента вытеснения, но и к образованию областей невытесненной нефти — целиков. Оценить связанные с этим потери нефти достаточно сложно; значительного упрощения можно добиться, рассматривая лишь предельное состояние — те наибольших размеров целики (так называемые предельно-равновесные целики), остаточной нефти, которые могут существовать в омывающем их фильтрационном потоке воды сколь угодно долго, но равновесие нарушится, если допустить существование целика больших размеров.

Таким образом, получаем следующую теоретическую схему: на поздней стадии вытеснения рассматривается стационарное состояние, при котором весь пласт (пространственная область D) разбивается на две области D_1 и D_2. Одна из них (D_1) занята неподвижной нефтью; в другой (D_2) движется вода, причем в этой области нефтенасыщенность снижена до предельно достижимого значения. Движение воды следует закону Дарси. Неизвестная граница C между областями D_1 и D_2 является для потока воды поверхностью тока. Кроме того — и это принципиально — будем полагать, что на C выполняется условие предельного равновесия, состоящее в том, что в каждой точке поверхности C градиент давления (направленный, очевидно, вдоль C) равен по абсолютной величине предельному градиенту давления для нефти в данной точке пласта. Иными словами, мы полагаем, что нефть находится на грани начала движения в каждой точке поверхности C. Ситуация здесь типична для предельного равновесия пластических тел и во многом аналогична равновесию тела на наклонной поверхности, составляющей с горизонтом угол, равный углу

трения. При этом считается, что в каждой точке области D заданы в качестве свойств пласта проницаемость k; предельный градиент для нефти G; предельная водонасыщенность s^0; отвечающая максимально возможному вытеснению нефти, и соответствующее значение фазовой проницаемости для воды в промытой зоне $f_1(s^0)$. Далее s^0 и $f_1(s^0)$ полагаются постоянными, хотя не составляет большого труда учесть их зависимость от проницаемости пористой среды и достигнутого градиента давления. В рассматриваемом случае во все соотношения войдет только проницаемость для воды в промытой зоне $k^* = kf_1(s^0)$, которая считается заданной в каждой точке пласта и связанной с локальным предельным градиентом соотношением (см. § 1 гл. III):

$$k^* G^2 = k_0^* G_0^2 = \text{const}. \qquad \text{(IV.169)}$$

В качестве основного модельного объекта рассмотрим слоисто-неоднородный пласт с проницаемостью $k^*(z)$, возрастающей от кровли к подошве пласта, $k'(z) \leqslant 0$, $0 \leqslant z < H$. Свойства пласта будем считать неизменными в плане, пласт — вскрытым на всю мощность сеткой нагнетательных и добывающих скважин. Область движения в плане обозначим через Δ. Очевидно, что при таких условиях промытая зона будет располагаться в нижней части пласта, а целик остаточной нефти — в верхней; они разделяются неизвестной границей $z = h(x, y)$, определяемой в ходе решения задачи. В той части (Δ_1) области Δ, где пласт промыт полностью, $h(x, y) \equiv \equiv H$; там, где целик занимает всю мощность пласта, область $\Delta_3) h = = 0$. Наконец, в оставшейся части Δ_2 области Δ имеем $0 < h < H$. Даже в рассматриваемом частном случае сформулированная задача еще чересчур сложна, и получить ее решение сложно даже численно. Учитывая явную аналогию ее с задачами безнапорной фильтрации (см. § 3 гл. II), будем искать ее приближенное решение, пренебрегая различием плотностей нефти и воды и считая распределение давления по мощности пласта гидростатическим (аналог приближения Буссинеска). Тогда распределение давления можно вполне характеризовать, задав его на подошве пласта $p(x, y)$. Градиент избыточного над гидростатическим давления постоянен вдоль вертикали в каждой точке пласта и равен $\nabla_2 p$. Поскольку в пределах области Δ_2 он должен быть равен предельному градиенту на поверхности целика $G(h)$, получаем возможность непосредственно выразить мощность промытого слоя через ∇p из уравнения [1]

$$G[h(x, y)] = |\nabla p(x, y)|. \qquad \text{(IV.170)}$$

Теперь можно перейти к интегральному описанию движения воды как фильтрационного течения в слое переменной толщины.

---

[1] Нетрудно понять, что поскольку на поверхности целика градиент давления должен быть направлен вдоль нее, соотношение (IV. 170) верно с точностью до членов порядка $(\nabla h \nabla p)^2 / |\nabla p|^2$. Поэтому совершаемая ошибка тем меньше, чем более пологой является искомая поверхность.

Интегрируя уравнение движения по мощности пласта, приходим к системе уравнений

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0, \quad \boldsymbol{w} = -(K/\mu)\nabla p;$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{H}\int_0^{h(|\nabla p|)} \boldsymbol{u}(x, y, z)\,dz, \quad K(|\nabla p|) = \frac{1}{H}\int_0^{h(|\nabla p|)} k(z)\,dz. \qquad \text{(IV.171)}$$

(Здесь операторы div и ∇ понимаются как двумерные). Величины $\boldsymbol{w}$ и $K(|\nabla p|)$ будем называть эффективной скоростью и проницаемостью; мощность промытой части пласта $h(|\nabla p|)$ определяется из уравнения (IV.170).

Уравнения (IV.171) эквивалентны уравнениям нелинейной фильтрации несжимаемой жидкости

$$\nabla \boldsymbol{w} = 0, \quad \nabla p = -\Phi(w)\,\boldsymbol{w}/w, \qquad \text{(IV.172)}$$

которые преобразованием годографа переводятся в линейную систему (см. § 1 гл. 3).

Конкретное выражение эффективного закона фильтрации $\Phi(w)$ определяется видом распределений $k(z)$ и $G(z)$ из соотношений (IV.170) — (IV.171).

Рассмотрим примеры. Примем с учетом корреляции (IV.169), что зависимости $k(z)$ и $G(z)$ имеют вид

$$k(z) = k_0(1 + z/z_0)^{-2}, \quad G(z) = G_0(1 + z/z_0). \qquad \text{(IV.173)}$$

Здесь z_0 — некоторый параметр; $G_0 = G(0)$. Из соотношений (IV.171) — (IV.172) получим следующее выражение эффективного закона фильтрации:

$$\Phi(w) = \frac{\mu(w + \lambda)}{K_0}, \quad \lambda = \frac{k_0 z_0 G_0}{\mu H}; \quad K_0 = \frac{k_0 z_0}{H}, \qquad \text{(IV.174)}$$

т. е. для распределения проницаемости и предельного градиента в виде (IV.174) задача отыскания целика в осредненной постановке приводится к известной задаче фильтрации с предельным градиентом для однородной жидкости (§ 3 главы I).

Аналогичным образом можно убедиться в справедливости следующих соответствий:

$$k(z) = \frac{k_0}{\operatorname{ch}^2(z/z_0)}, \quad G(z) = G_0 \operatorname{ch}\frac{z}{z_0}, \quad \Phi(w) = \frac{\mu(w^2 + \lambda^2)^{1/2}}{K_0}. \qquad \text{(IV.175)}$$

Вообще, если зависимость $k(z)$ допускает параметрическое представление

$$\frac{dz}{dh} = \frac{k_0^{\alpha}}{\mu}\left(\operatorname{sh}\frac{h}{z_0}\operatorname{ch}\frac{h}{z_0}\right)^{\alpha-1}; \quad k = \frac{k_0}{\operatorname{ch}^{2\alpha}(h/z_0)}; \quad G(h) = G_0 \operatorname{ch}^{\alpha}\frac{h}{z_0}, \qquad \text{(IV.176)}$$

то ей соответствует выражение эффективного закона фильтрации вида

$$\Phi(w) = \mu K_0^{-1}\left(w^{2/\alpha} + \lambda^{2/\alpha}\right)^{\alpha/2}. \qquad \text{(IV.177)}$$

Устремляя параметр α к нулю, что соответствует однородному пласту с проницаемостью k_0, получим

$$\Phi(w) = G_0, \quad w < \lambda; \quad \Phi(w) = \mu w/K_0, \quad w > \lambda. \qquad \text{(IV.178)}$$

Во всех примерах приведенные соотношения справедливы для скоростей, меньших $\lambda_H = K_H G(H)/\mu$; при этом $\Phi(w) \leqslant G(H)$. Для больших скоростей пласт полностью промывается водой, и эффек-

тивная проницаемость перестает изменяться с изменением интенсивности движения, а соответствующий закон фильтрации для осредненного движения оказывается в области больших скоростей линейным

$$\Phi(w) = \mu w/K_H, \quad K_H = H^{-1}\int_0^H k(z)\,dz, \quad |\nabla p| \geqslant G(H). \quad \text{(IV.179)}$$

В тех случаях, когда общая интенсивность движения невелика, полностью промытые зоны локализуются вблизи скважины. Если их влиянием на процесс формирования целиков можно пренебречь, то осредненное движение во всем пласте описывается уравнениями нелинейного закона фильтрации вида (IV.174) — (IV.178). Формально это соответствует асимптотике $H \to \infty$. При этом для оценки размеров целиков можно использовать многочисленные решения задач нелинейной фильтрации, полученные ранее.

Целики в однородном пласте. Рассмотрим случай однородного пласта, $k = \text{const}$. Для такого пласта $G(0) = G(H) = G$, а мощность промываемой водой части пласта h и эффективная проницаемость K становятся кусочно-постоянными функциями градиента давления:

$$h(|\nabla p|) = 0, \quad K(|\nabla p|) = 0, \quad |\nabla p| < G,$$
$$h(|\nabla p|) = H, \quad K(|\nabla p|) = k, \quad |\nabla p| > G. \quad \text{(IV.180)}$$

Из этих соотношений ранее делался вывод о том, что при достижении градиентом давления значения G, равного предельному, на некоторой линии физической плоскости мощность промытого слоя скачком изменяется от нуля до полной мощности пласта. Это соответствует эффективному разрывному закону фильтрации, описываемому выражениями (впервые предложенными М. Г. Алишаевым с соавторами)

$$\Phi(w) = \mu w/k; \quad w > \lambda; \quad 0 \leqslant \Phi \leqslant G; \quad w = 0; \quad \lambda = kG/\mu. \quad \text{(IV.181)}$$

Однако при предельном переходе от описанной схемы течения в пластах с непрерывно изменяющейся проницаемостью к течениям в однородных пластах оказывается, что в общем случае условие равенства модуля градиента давления предельному выполняется не на линии в плоскости (x, y), отвечающей вертикальной границе целика, а в области (Δ_2), в которой мощность промытого слоя $h(x, y)$ является непрерывной функцией потока воды. С изменением эффективной скорости фильтрации от нуля до λ мощность промытого слоя изменяется от нуля до H. Соответствующий эффективный закон фильтрации определяется уравнениями

$$\Phi(w) = G, \quad 0 < w < \lambda; \quad \Phi(w) = \mu w/k, \quad w > \lambda,$$
$$0 \leqslant \Phi(w) \leqslant G, \quad w = 0. \quad \text{(IV.182)}$$

В отличие от разрывного, этот закон фильтрации позволяет рассматривать течения и в области скоростей w, меньших λ.

Таким образом, при формировании целиков остаточной нефти и в однородных пластах вся область течения на физической плоскости в общем случае распадается на три подобласти: Δ_1 — полностью промытого пласта; Δ_2 — частично промываемого пласта, в которой модуль градиента давления постоянен и равен предельному; Δ_3 — подобласть, в которой целик занимает всю мощность пласта и движение воды отсутствует.

Для соответствующих областей имеем

$$\nabla^2 p(x, y) = 0, \quad h(x, y) = H, \quad (x, y) \in \Delta_1,$$
$$|\nabla p(x, y)| = G, \quad \nabla (h(x, y) \nabla p/G) = 0, \quad (x, y) \in \Delta_2,$$
$$w(x, y) = 0, \quad h(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Delta_3. \qquad \text{(IV.183)}$$

На границах областей решения удовлетворяют условиям непрерывности давления, потока и мощности $h(x, y)$.

При переходе на плоскость годографа (w, θ) область Δ_1 отображается в область Ω_1, лежащую в полуплоскости $w > \lambda$; Δ_2 — в область Ω_2, лежащую в полосе $0 < w < \lambda$, а Δ_3 — в отрезок линии $w = 0$. Уравнения (IV.183) в соответствующих областях плоскости годографа принимают вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial w} = -\frac{k}{\mu w} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial p}{\partial w} = \frac{\mu}{k w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (w, \theta) \in \Omega_1,$$
$$\frac{1}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0, \quad \frac{1}{G} \frac{\partial p}{\partial w} = \frac{1}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (w, \theta) \in \Omega_2, \qquad \text{(IV.184)}$$

откуда для области Δ_2 постоянного градиента давления имеем решение

$$\psi = f(\theta), \quad p(w, \theta) = -G w^{-1} f'(\theta) + \varphi(\theta),$$
$$z = x + iy = z_0(\lambda, \theta) + e^{i\theta} f'(\theta)(w^{-1} - \lambda^{-1}), \qquad \text{(IV.185)}$$

где $f(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ — неизвестные функции.

Из (IV.185) следует, что при $f'(\theta) \neq 0$ области Ω_2 на физической плоскости соответствует область, в которой линии тока являются прямыми, давление вдоль них изменяется линейно, а эффективная скорость w и мощность промытой части пласта h определяются выражениями

$$w = [\lambda^{-1} + |z(w, \theta) - z(\lambda, \theta)|/f'(\theta)]^{-1}, \quad h = Hw/\lambda. \qquad \text{(IV.186)}$$

Если же $f'(\theta) = 0$, то соответствующая часть области на физической плоскости отображается в линию, являющуюся отрезком линии тока. Поток жидкости в этих точках направлен по касательной к линии $|\nabla p| = G$, при переходе через которую мощность промытой части пласта $h(x, y)$ изменяется скачком от нуля до H.

Иными словами, постановка задачи со скачкообразным изменением промытой мощности оказывается частным случаем, когда неизвестная граница является линией тока осредненного плоского течения.

Задачи указанного класса сводятся к отысканию решения уравнения Лапласа в плоской области, часть границы которой заранее

неизвестна и отыскивается из того условия, что она является одновременно линией тока и линией постоянства модуля градиента давления (или, что эквивалентно, скорости фильтрации). Эта задача, сформулированная впервые в [34], эффективно решается методами теории струй [9, 24]. Характерные результаты приведены на рис. 54. Детали расчетов можно найти в книгах [9, 24]. Гораздо сложнее решаются задачи, в которых область постоянного модуля градиента давления $0 < h < H, |\nabla p| = G$ (область Δ_2) не вырождается в линию. В настоящее время они являются предметом интенсивного изучения, развиты подходы к их решению, В. Н. Панковым и С. В. Панько получен ряд точных и приближенных решений. На рис. 55 показаны возможные качественно различные варианты расположения целиков при разработке кругового пласта эксцентрично расположенной скважиной.

То обстоятельство, что задача отыскания предельно-равновесных целиков в осредненной постановке приводится к задаче нелинейной фильтрации с законом фильтрации специального вида, позволяет применить к ее решению весь хорошо разработанный к настоящему времени аппарат теории нелинейной фильтрации (см. § 3 главы I и цитированную там литературу). Таким путем достаточно легко может быть оценено влияние различных параметров на размеры и форму целиков. Так, на рис. 56 показано расположение целиков для системы источник — сток интенсивности Q, расположенных на расстоянии $2a$ друг от друга в двухслойном пласте.

Решение построено численно в безразмерных переменных. Масштабами длины и скорости выбраны величины a и Q/a, при этом

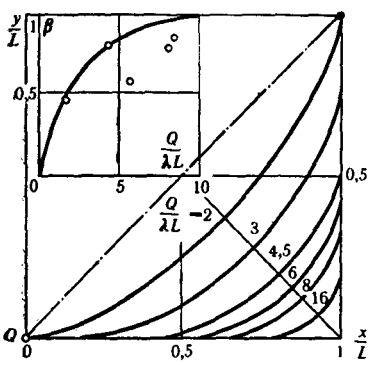
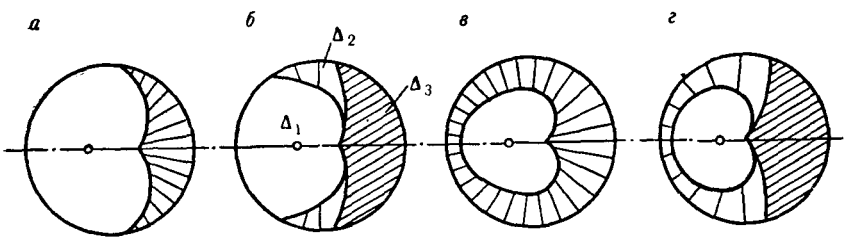


РИС. 54. Расположение целиков и зависимость коэффициента охвата для пятиточечной схемы площадного заводнения от интенсивности потока

РИС. 55. Расположение целиков остаточной нефти при разработке кругового пласта эксцентрично расположенной скважиной по результатам расчетов В. Н. Панкова и С. В. Панько:

а — г — возможные конфигурации целиков



решение зависит от двух безразмерных параметров

$$\varepsilon = \pi a k_2 G/\mu Q,$$
$$\delta = (1 + k_2 H_2/k_1 H_1).$$

Результаты расчетов, приведенные на рис. 56, отвечают $\varepsilon = 0{,}4$, $\delta = 5$.

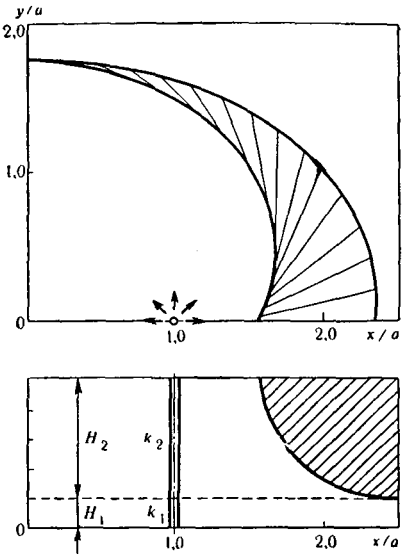


РИС. 56. Расположение целиков для системы источник — сток в двухслойном пласте

В заключение этого параграфа необходимо сделать несколько замечаний об использовании теории предельно равновесных целиков при оценке предельной нефтеотдачи пластов, содержащих вязкопластичные нефти. Определив предельно равновесные целики, мы имеем основание утверждать, что целики больших размеров не могут оставаться неподвижными в омывающем их потоке воды. Однако в силу неединственности равновесного состояния пластической жидкости мы не вправе утверждать, что в реальном процессе вытеснения сформируются в конце концов предельно равновесные целики, а не целики меньших размеров (на границе которых выполняется неравенство $|\nabla p| \leqslant G$, но не всюду оно переходит в равенство). Таким образом, можно полагать, что оценка потерь нефти по объему предельно равновесных целиков — это оценка сверху. Чтобы определить степень близости этой оценки к тому, что реализуется фактически, для некоторых схем течения было проведено моделирование вытеснения вязкопластичной жидкости вязкой на щелевом лотке. Результаты моделирования (точки на рис. 54) достаточно хорошо согласуются с расчетами по предельной схеме.

ГЛАВА 5

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ ПОДЗЕМНАЯ ГИДРОДИНАМИКА НЕФТЯНОГО ПЛАСТА

Заводнение, подробно рассмотренное в предыдущей главе, на сегодня является основным технологическим процессом извлечения нефти. Однако оно, как уже говорилось, сопряжено с большими потерями нефти в пласте. Поэтому сейчас все больше обращаются к процессу вытеснения нефти из пласта нагретой водой или водой с различного рода добавками. Свойства воды, нефти или пористой среды изменяются при этом так, что условия вытеснения под влиянием возникающих физико-химических процессов становятся более благоприятными. Мы будем называть такой технологический процесс физико-химическим заводнением.

Большое разнообразие возможных агентов воздействия и режимов их введения, большая стоимость процесса физико-химического заводнения в сравнении с обычным заводнением и, что весьма существенно, зависимость результатов процесса от режима и большего числа параметров пластовой системы предъявляют повышенные требования к предварительному анализу и расчету физико-химического заводнения. Такой анализ и расчеты основаны на теории гидродинамических процессов, сопровождаемых химическими превращениями, а также тепло- и массопереносом. Этот раздел подземной гидродинамики по аналогии с соответствующим разделом общей гидродинамики естественно назвать физико-химической подземной гидродинамикой. Особо нас будут интересовать с учетом сказанного выше такие процессы, в которых физико-химические факторы сами оказывают влияние на движение жидкостей. Физический или химический агент, переносимый потоком и непосредственно влияющий на гидродинамику, мы будем называть динамически активной примесью. Прежде чем переходить к изложению соответствующей теории, целесообразно рассмотреть основные закономерности процессов переноса в пористой среде на более простом примере однофазного течения несжимаемой жидкости.

§ 1. Процессы тепло- и массопереноса в пористой среде

Рассмотрим пористую среду, насыщенную однофазной жидкостью. Будем считать, что жидкость содержит растворенное вещество (примесь), массовую концентрацию которого мы обозначим через c. В то же время допустим что часть примеси a в расчете на

единицу объема среды может содержаться в скелете пористой среды. Поглощение скелетом примеси будем называть сорбцией; понимая под этим адсорбцию (физическую и химическую) примеси на поверхности скелета, растворение (абсорбцию) примеси в материале зерен скелета, а иногда даже механическое удержание примеси в сужениях поровых каналов (это существенно для полимерных растворов). Плотность раствора в соответствии с общими термодинамическими положениями определяется концентрацией, температурой и давлением:

$$\rho = \rho(c, T, p). \tag{V.1}$$

Поэтому в единице объема пористой среды содержится примеси и растворителя, соответственно,

$$mc + a, \quad m(\rho - c). \tag{V.2}$$

Фильтрационный поток со скоростью фильтрации $\boldsymbol{w}$ переносит как растворитель, так и примесь. Легко убедиться, что для смеси форма уравнения неразрывности остается неизменной. Чтобы составить баланс растворенного вещества, необходимо рассмотреть структуру потока примеси через границу выделенного объема. Этот поток состоит из нескольких различных по своей природе составляющих. Одна из них соответствует переносу растворенного вещества общим потоком, характеризуемому плотностью потока массы:

$$\boldsymbol{q}_1 = c\boldsymbol{w}. \tag{V.3}$$

Этот поток существует даже при равномерном по объему пористой среды распределении примеси, если жидкость движется. Если примесь распределена неравномерно, то даже в отсутствие общего потока ($w=0$) будет происходить перераспределение ее, обусловленное диффузией. Как известно, диффузия вызывается хаотическим движением на молекулярном уровне; чтобы подчеркнуть это, будем называть ее молекулярной диффузией. Согласно основному закону диффузии (закону Фика), для изотропной среды диффузионный поток пропорционален и противоположен по направлению градиенту концентрации:

$$\boldsymbol{q}_D = -D\nabla c. \tag{V.4}$$

В пористой среде примесь может, вообще говоря, диффундировать и в твердых зернах, и по поверхности контакта скелета с поровой жидкостью (поверхностная диффузия), так что закон Фика нуждается в уточнении. Эти эффекты несущественны для наших целей. Поэтому в дальнейшем используется выражение для диффузионного потока в форме (V.4) с коэффициентом диффузии D, постоянным и близким к коэффициенту молекулярной диффузии в жидкости.

Существенно, что в пористой среде при наличии фильтрации должен существовать, наряду с уже рассмотренными конвективным переносом и молекулярной диффузией, некоторый механизм переноса, обычно называемый дисперсией, обусловленный пространст-

венными флуктуациями поля скоростей фильтрационного движения (т. е. отклонением локальных значений истинной скорости от среднего значения w) [12].

Для пояснения закономерностей этого механизма напомним, что коэффициент диффузии в газе равен по порядку величины произведению пульсации скорости (имеющей порядок скорости звука $c_a \sim 10^3$ м/с) на длину свободного пробега ($\lambda \sim 10^{-9} - 10^{-10}$ м), $D_M \sim c_a\lambda$. Подобно этому пространственные флуктуации поля фильтрационных скоростей вызывают как бы диффузионное перемешивание, называемое конвективной диффузией [1], коэффициент диффузии для которого по порядку величины должен быть равен произведению флуктуации скорости (имеющей порядок скорости фильтрации w) на масштаб флуктуации l. Если этот масштаб считать равным внутреннему масштабу пористой среды d, то

$$D' \sim wd. \tag{V.5}$$

При обычных скоростях фильтрации это произведение невелико ($\sim 10^{-10}$ м^2/с) и поэтому имеет порядок коэффициента молекулярной диффузии для жидкостей. Однако те же соображения применимы к перемешиванию, обусловленному флуктуациями скорости любого масштаба вплоть до 1—10 м. Вообще говоря, конвективная диффузия происходит тем быстрее, чем сильнее выражена неоднородность пласта и чем шире спектр размеров неоднородностей. Это важное обстоятельство необходимо учитывать при всех оценках роли конвективной диффузии. В тех случаях, когда оценок недостаточно и нужны более точные количественные расчеты, приходится прибегать к экспериментальному определению коэффициентов конвективной диффузии.

Пространственные флуктуации поля скоростей приводят к дополнительной дисперсии не только в направлении движения, но и в поперечном направлении. Нет оснований ожидать, даже для изотропной среды, что «поперечная» дисперсия будет происходить с той же скоростью, что и «продольная». Поэтому необходимо вводить продольный и поперечный коэффициенты дисперсии

$$D_{\parallel} = l_{\parallel} w, \quad D_{\perp} = l_{\perp} w. \tag{V.6}$$

Из изложенного следует вывод, подтверждаемый более детальным анализом. Именно в реальных пористых пластах процесс дисперсии доминирующий. Для него справедлив закон Фика, однако этот процесс анизотропен, и коэффициент диффузии растет с ростом скорости; выражение для потока имеет вид

$$q_i' = -D_{ij}' \partial c / \partial x_i. \tag{V.7}$$

Тензор коэффициентов дисперсии (конвективной диффузии) D_{ij}' имеет в изотропной среде в качестве одного из главных направ-

[1] Наиболее близкий аналог конвективной диффузии — так называемая тейлоровская дисперсия — перемешивание примеси в неоднородном по сечению потоке.

лений направление скорости фильтрации и в соответствующих главных осях принимает диагональный вид:

$$D'_{11} = l_{\parallel} w, \quad D'_{22} = D'_{33} = l_{\perp} w, \quad D'_{12} = D'_{23} = D'_{31} = 0. \qquad (V.8)$$

Коэффициенты $l_{\parallel}$ и $l_{\perp}$, имеющие размерность длины, определяются строением пористой среды и должны определяться для каждого объекта или класса объектов. Накопленный к настоящему времени материал, в основном, подтверждает приведенные соображения, хотя экспериментальная зависимость коэффициента конвективной диффузии от скорости ближе отвечает степенному закону

$$D' \sim w^{\varkappa}, \quad \varkappa = 1{,}1 -- 1{,}2. \qquad (V.9)$$

Можно убедиться, что степенной характер зависимости является следствием наличия у среды спектра масштабов неоднородности.

Запишем окончательно выражение для потока примеси:

$$\boldsymbol{q} = c\boldsymbol{w} - \boldsymbol{D}\nabla c; \qquad (V.10)$$

$$q_i = cw_i - D_{ij}\partial c/\partial x_j; \quad D_{ij} = D_M \delta_{ij} + D'_{ij}. \qquad (V.11)$$

Тогда уравнение баланса примеси после обычных преобразований приводится к виду

$$\partial (mc + a)/\partial t + \operatorname{div} \boldsymbol{q} = 0 \qquad (V.12)$$

или после подстановки выражения для $\boldsymbol{q}$

$$(mc + a)_{,t} + \nabla (\boldsymbol{w}c) = \nabla(\boldsymbol{D}\nabla c). \qquad (V.13)$$

Даже если поле скоростей $\boldsymbol{w}$ известно и известна зависимость тензора конвективной диффузии $\boldsymbol{D}$ от скорости, из уравнения (V.13) нельзя найти поле концентрации. Дело в том, что еще не задано распределение примеси между жидкой и твердой фазами. Наиболее общее допущение, которое будет использоваться, состоит в том, что скорость межфазного обмена примесью зависит от количества сорбированной примеси в единице среды a, концентрации примеси в растворе c и скорости фильтрации w:

$$a_{,t} = \varphi (c, a, w). \qquad (V.14)$$

Если сорбция обратима, то существует равновесное значение содержания сорбированной примеси:

$$a = \alpha (c, w), \quad \varphi (c, \alpha (c, w), w) = 0. \qquad (V.15)$$

Если отклонение от равновесия невелико, то можно записать простейшее уравнение кинетики сорбции в виде

$$a_{,t} = -\tau^{-1} (a - \alpha (c, w)), \quad \tau = -1/\varphi_{,a} (c, \alpha, w) > 0. \qquad (V.16)$$

Этим уравнением и ограничимся, хотя в последующем может оказаться необходимым рассмотрение более сложных кинетических схем. Входящие в уравнение (V.16) функции $\alpha (c, w)$ считаются заданными. Определение их — экспериментальное, или из более детальной теории — особая задача, которая должна составить предмет специального рассмотрения.

В тех случаях, когда примесь может образовываться или уничтожаться, в правой части уравнений (V.13) и (V.14) должны быть дописаны члены, равные интенсивности генерации примеси, т. е. количеству примеси, образующемуся в единицу времени в единице объема пористой среды, соответственно, в жидкости и в материале скелета.

Путем аналогичных рассуждений можно записать уравнение баланса тепла для пористой среды. При этом, поскольку, как уже известно, время установления теплового равновесия между жидкостью и пористым скелетом мало, температуры их можно считать равными.

При этом получим:

$$(CT + m\rho i)_{,t} + \nabla(\rho i \boldsymbol{u}) = \nabla(\lambda \nabla T) + Q. \qquad \text{(V.17)}$$

Здесь T — абсолютная температура; $i(p, T)$ — удельная энтальпия жидкости; C — теплоемкость скелета в расчете на единицу объема среды. Тензор теплопроводности λ учитывает и обычную (молекулярную) и конвективную теплопроводность, обусловленную, подобно конвективной диффузии, микронеоднородностью поля скоростей. Однако поскольку температуропроводность жидкости на несколько порядков выше коэффициента молекулярной диффузии, относительная роль конвективной теплопроводности обычно невелика, и ее можно не учитывать. В этом случае λ превращается в обычный коэффициент теплопроводности насыщенной пористой среды.

Интенсивность тепловыделения Q учитывает тепловыделение за счет механической диссипации, тепловой эффект химических реакций, тепловой эффект адсорбции и другие источники тепла. В задачах, рассматриваемых ниже, существенное тепловыделение происходит лишь при внутрипластовом горении; в прочих случаях им можно пренебречь.

Если не происходит фазовых переходов, то $di = C_p dT$, где C_p — теплоемкость жидкости при постоянном давлении можно считать постоянной. Тогда, считая тепловыделение равным нулю, получим из (V.17) уравнение конвективной теплопроводности

$$\partial(m\rho C_p T + CT)/\partial t + \nabla(\rho C_p T \boldsymbol{u}) = \nabla(\lambda \nabla T). \qquad \text{(V.18)}$$

Используя уравнение неразрывности и считая λ и C постоянными, преобразуем (V.18) к виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma \boldsymbol{u} \nabla T = \chi \nabla^2 T; \gamma = \frac{\rho C_p}{C + m\rho C_p}; \ \chi = \frac{\lambda}{C + m\rho C_p}. \qquad \text{(V.19)}$$

Уравнение (V.19) с формальной точки зрения представляет собой упрощенный вариант уравнений переноса примеси (V.13) — (V.14) и потому может быть исследовано в рамках общей с ними теории. До тех пор, пока поле скоростей фильтрации считается известным, а тепловые и диффузионные процессы не связанными между собой, можно рассматривать гидродинамическую картину, массоперенос и теплоперенос последовательно и независимо друг от друга. Более того, ничего не изменится, если рассматривать произвольное число

переносимых потоком примесей различной природы. Гораздо более сложная картина возникает, если существенно влияние примесей друг на друга и на гидродинамику. Рассмотрим пока основные особенности задачи о переносе фильтрационным потоком динамически нейтральной (т. е. не оказывающей обратного влияния на поток) примеси.

Будем считать, что заданы характерный линейный размер потока L и характерная скорость U. Тогда, вводя безразмерные координаты ξ_i и время τ,

$$\xi_i = x_i/L, \quad \tau = tU/L, \tag{V.20}$$

получим из (V.13) (V.14):

$$\frac{\partial (mc + a)}{\partial \tau} + w_i \frac{\partial c}{\partial \xi_i} = \frac{D}{UL} \frac{\partial^2 c}{\partial \xi_i^2}, \quad \frac{\partial a}{\partial \tau} = \frac{L}{U} \varphi (a, c, u); \quad w_i = u_i/U. \tag{V.21}$$

По сделанным оценкам при наличии макроскопического фильтрационного потока $D \sim Ul$, так что $D/UL \sim l/L$. Эта оценка показывает, что для переноса примеси в пористой среде число Шмидта (часто называемое также диффузионным числом Пекле Pe_D) $\mathrm{Sh} = UL/D$, характеризующее относительную роль конвекции и диффузии, имеет порядок отношения L/l линейного размера потока к внутреннему масштабу пористой среды l и потому обычно много больше единицы.

Рассмотрим для уравнения (V.21) внешнее приближение, отвечающее по предыдущему (см. гл. IV) исследованию процесса в масштабах всего пласта, т. е. перейдем в системе (V.21) формально к пределу $L \to \infty$. Тогда получим

$$(mc + a)_{,\tau} + w_{ic,\xi_i} = 0, \quad \varphi (a, c, w) = 0, \quad a = \alpha (c, w). \tag{V.22}$$

Соотношение (V.22) представляет собой уравнение переноса нейтральной примеси в крупномасштабном приближении. Физически оно соответствует пренебрежению диффузией и предположению о равновесном распределении примеси между твердой и жидкой фазами. Дифференциальные уравнения (V.22) легко интегрируются в общем виде для любого стационарного потока. Действительно, рассмотрим произвольную линию тока фильтрационного потока, определяемую параметрически условиями

$$ds/dt = m^{-1}w, \quad dx_i = m^{-1}w_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0. \tag{V.23}$$

Здесь x_i^0 — координаты жидкой частицы в момент $t = t_0$ — характеризуют выбранную индивидуальную линию тока. Согласно уравнениям (V.22), скорость движения вдоль линии тока u можно считать известной функцией длины дуги s, $u = u(s)$. Пусть в момент $t = t^0$ в точке $M^0\{x_i^0\}$ концентрация примеси равна c^0. Рассмотрим точку M, движущуюся по линии тока Γ^0, проходящей через M^0 со скоростью

$$v(s) = u(s)\,[m + \alpha_{,c}]^{-1}. \tag{V.24}$$

При этом в точке M имеем:

$$\frac{dc(M)}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{u_i(s)}{m + \alpha_{,c}} \frac{\partial c}{\partial x_i} = 0.$$

Таким образом, каждое значение концентрации примеси переносится по пласту вдоль линий тока со скоростью, равной скорости жидкой частицы u/m, умноженной на постоянный множитель $(1 + \alpha_{,c}/m)^{-1}$, меньший единицы.

Весьма важно, что на перенос вдоль данной линии тока совершенно не влияет характер распределения примеси в поперечном направлении. Таким образом, в внешнем (крупномасштабном) приближении процесс переноса примеси описывается одномерным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}[mc + \alpha(c, u(s))] + u\frac{\partial c}{\partial s} = 0. \qquad \text{(V.25)}$$

Как было упомянуто (см. § 2, гл. IV), общее решение этого уравнения имеет вид

$$t = t(c, s) = t_0 + (1 + A'(c)) \int_{s^0(c)}^{s} \frac{ds}{u(s)}; \quad A = \frac{\alpha}{m}. \qquad \text{(V.26)}$$

Это выражение определяет время прихода примеси заданной концентрации c в точку с координатой s вдоль линии тока. Ему можно дать иную, более ясную физическую интерпретацию. Рассмотрим узкую трубку тока, окружающую данную линию тока. Из условия неразрывности для ее нормального сечения $\omega(s)$ легко получим

$$\omega(s)\, u(s) = \omega_0 u_0 = \text{const}.$$

Поэтому интеграл в (V.26) пропорционален объему $S(s)$ трубки тока между сечениями, отвечающими значениям координаты s_0 и s. Этот объем монотонно зависит от s, и его удобно использовать в качестве универсального параметра вдоль линии тока, так как уравнение переноса и его общее решение при этом принимают особо простой вид:

$$\frac{\partial(c + A)}{\partial t} + \frac{u_0}{m}\frac{\partial c}{\partial S} = 0, \quad S(c) = S_0(c) + u_0(t - t_0)/m(1 + A'(c)). \qquad \text{(V.27)}$$

Иными словами, в плоскости t, S каждое значение концентрации c переносится с постоянной скоростью, отношение которой к скорости потока u_0/m зависит только от c.

Дальнейшее исследование производится вполне аналогично анализу вытеснения в задаче Баклея — Леверетта. Начальными и граничными условиями определяется на плоскости t, S линия, вдоль которой заданы значения концентрации. Эти значения переносятся по проведенным через граничные точки прямолинейным характеристикам (V.27). Если характеристики не пересекаются между собой, то решение задачи оказывается (во всяком случае, при гладких начальных условиях) гладким. Если же характеристики пересека-

ются, то даже при гладком начальном распределении решение оказывается разрывным. Поскольку, как видно из (V.27), наклон характеристик в плоскости (t, S) пропорционален $(1 + A_{,c})^{-1}$, характер решения вполне определяется начальными и краевыми условиями и видом изотермы сорбции $a(c)$. Если начальное возмущение концентрации имеет вид «ступеньки»

$$c(s, 0) = c_0, \quad c(0, t) = c^0, \tag{V.28}$$

то возникающая волна концентрации распространяется как ступенька с постоянной скоростью при

$$(c^0 - c_0) A''(c) < 0, \quad c \in (c_0, c^0)$$

и в виде непрерывной волны, если верно обратное неравенство. Если на отрезке (c_0, c) знак кривизны изотермы сорбции изменяется, то при помощи соотношений (V.26) получаем комбинацию скачков и непрерывных волн.

При этом на скачках концентрации выполняется соотношение баланса примеси (см. гл. IV)

$$[c] + [A] = V[c], \quad [\zeta] = \zeta^+ - \zeta^-. \tag{V.29}$$

Результат исследования задачи о распространении по пласту заданного на входе $(x = 0)$ начального скачка концентрации — условия (V.28) — удобно сформулировать в следующем виде.

Пусть $c_0 < c^0$. Определим при $c_0 \leqslant c \leqslant c^0$ функцию

$$A_*(c) = \min_{c_1,\, c_2 \in \Delta} \left\{ A(c),\ A(c_1) + \frac{A(c_2) - A(c_1)}{c_2 - c_1}(c - c_1) \right\}, \tag{V.30}$$

которую назовем вогнутой оболочкой функции $A(c)$. Если представить себе график $A(c)$ вырезанным из жесткого материала шаблоном, то график $A_*(c)$ будет соответствовать форме нити, натянутой между точками $c_0, A(c_0)$; $c^0, A(c^0)$ снизу на этот шаблон. Тогда устойчивое решение задачи о распространении скачка дается соотношением

$$S(c, t) = u_0 t/m\,(1 + A_*'(c)), \tag{V.31}$$

причем, как видно из (V.31), прямолинейным участкам $A_*(c)$ отвечают скачки $c(S, t)$, а вогнутым дугам — участки непрерывного изменения концентрации. Угловым точкам $A_*(c)$ соответствуют участки постоянства c при изменении S. На рис. 57 показаны возможные типы решений, отвечающие различным формам изотермы сорбции $a(c)$.

Аналогии между задачами переноса сорбирующейся примеси и задачами двухфазной фильтрации не ограничиваются описанием процесса в крупномасштабном приближении. В области скачков градиент концентрации и производная ее по времени, отвечающие крупномасштабному приближению, бесконечно велики, и, какими бы малыми не были диффузия и время релаксации, пренебрегать ими нельзя.

Будем действовать по аналогии с исследованием решения вблизи скачков насыщенности (см. гл. IV). Пусть Σ — поверхность разрыва концентрации, отвечающая крупномасштабному приближению. Будем считать ее гладкой и введем в окрестности этой поверхности локальную подвижную систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, где ξ_2 и ξ_3 — криволинейная ортогональная сетка координат на поверхности Σ; ξ_1 — координата, направленная по нормали к ней.

Запишем уравнение линий тока фильтрационного течения:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}(M_0, t), \quad \partial \boldsymbol{R}/\partial t = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}).$$

Здесь M_0 — положение отмеченной точки на поверхности разрыва при $t = 0$. Дальнейшее движение поверхности разрыва в силу соотношений на скачках описывается уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_1(M_0, t), \quad \partial \boldsymbol{R}_1/\partial t = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})/m\,[1 + A'(c(M_0))] = \boldsymbol{V}.$$

В локальной системе координат уравнения переноса примеси примут вид:

$$\frac{\partial (mc + a)}{\partial t} - (\boldsymbol{V}\nabla_\xi)(mc + a) + (\boldsymbol{u}\nabla_\xi)c = \nabla_\xi (\boldsymbol{D}\nabla_\xi c),$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = (\boldsymbol{V}\nabla_\xi)a = \varphi. \tag{V.32}$$

В координатах ξ_i переменные c и a гладко изменяются по направлениям ξ_2 и ξ_3 и резко по направлению ξ_1. Произведем растяжение переменных, положив

$$\zeta_i = D^{-1}\xi_i, \quad \tau = D^{-1}t. \tag{V.33}$$

Упрощая полученные уравнения (опуская малые члены по аналогии с гл. IV), получим внутреннюю задачу:

$$\frac{u_N}{V_N}\frac{dc}{d\zeta} - \frac{d(mc + a)}{d\zeta} = \frac{d^2c}{d\zeta^2}, \quad \zeta = \zeta_1,$$

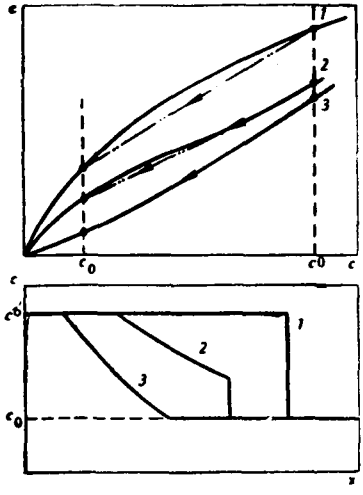
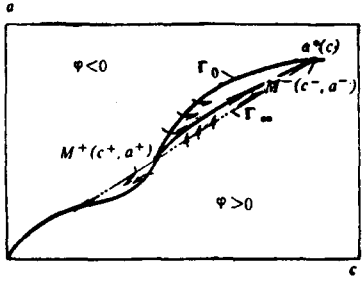


РИС. 57. Характерный вид решения в задачах переноса сорбирующейся примеси.
Изотермы сорбции: *1* — выпуклая; *2* — смешанная; *3* — вогнутая

РИС. 58. К анализу уравнения (V.39)



$$\frac{V_N^2}{D}\frac{da}{d\zeta} = \varphi, \quad c(\pm\infty) = c^{\pm}, \quad a(\pm\infty) = a^{\pm}. \tag{V.34}$$

Здесь u_N и V_N — нормальные к Σ компоненты скорости фильтрации и скорости скачка.

Краевые условия служат для согласования внутреннего решения с внешним. Интегрируя первое уравнение (V.34), получим с учетом условий на бесконечности

$$u_N c - V_N(mc + a) - V_N dc/d\zeta = \text{const} = u_N c^{\pm} - V_N(mc^{\pm} + a^{\pm}). \tag{V.35}$$

Из второго уравнения (V.34) и условий на бесконечности получаем

$$a^{\pm} = \alpha(c^{\pm}). \tag{V.36}$$

Затем из (V.35) с учетом условий на бесконечности находим необходимое условие существования стационарного внутреннего решения, совпадающее с полученным раньше выражением для скорости скачка:

$$V_N = u_N/m\,(1 + [A]/[c]); \quad A = \alpha/m. \tag{V.37}$$

Это соотношение выведено в предположении, что искомое внутреннее решение существует. Чтобы доказать его существование, рассмотрим уравнение (V.35) совместно со вторым уравнением (V.34) и покажем, что они имеют решение с требуемой асимптотикой при $\zeta \to \pm\infty$. Перепишем эту систему в виде

$$V_N\frac{dc}{d\zeta} = u_N(c^- - c) + V_N[m(c - c^-) + a - a^-] =$$

$$= \frac{u_N}{(1 + [A]/[c])\,m}\left[a - a^- + (c - c^-)\frac{a^- - a^+}{c^+ - c^-}\right]; \quad \frac{da}{d\zeta} = \frac{D}{V_N^2}\varphi(a, c). \tag{V.38}$$

Система (V.38) не содержит явно независимой переменной ζ, и ее удобно представить на фазовой плоскости переменных a, c. Имеем

$$\frac{da}{dc} = \frac{D}{V_N^2}\,\frac{\varphi(a, c)}{a - a^- - (c - c^-)\,\Delta a/\Delta c}; \quad \Delta\{\zeta\} = \zeta^+ - \zeta^-. \tag{V.39}$$

Изоклины нуля Γ_0: $da/dc = 0$ и бесконечности Γ_∞ $da/dc = \infty$ — уравнения (V.39) заданы, соответственно кривой $a = \alpha(c)$ и прямой $a = a^- + (c - c^-)\,\Delta a/\Delta c$. Эти изоклины обязательно пересекаются в точках (рис. 58) $M^-(c^-, a^-)$ и $M^+(c^+, a^+)$ и разбивают представляющий физический интерес первый квадрант плоскости (c, a) на ряд областей, знаки производной da/dc в которых определяются следующим образом. При больших значениях a и малых c, очевидно, $da/dc < 0$; далее каждый переход через изоклину нуля или бесконечности приводит к смене знака. Поэтому для показанного на рис. 58 расположения изоклин точка M^+ является седлом, точка M^- — узлом, и имеется единственная интегральная кривая уравнения (V.39) — сепаратриса седла M^+, соединяющая обе особые

точки. Отвечающее ей решение обозначим через $a^0(c)$. Если оно найдено, то из уравнения (V.38) имеем

$$\zeta = \int \frac{(m + [a]/[c])\, dc}{a^0(c) - a^- + (c - c^-)(a^- - a^+)/(c^+ - c^-)}. \qquad (V.40)$$

При этом, как и должно было быть по условию задачи, интеграл расходится при $c \to c^\pm$. Характер расходимости зависит от порядка касания линий Γ_0 и Γ_∞ в соответствующих точках (см. гл. IV). Если эти линии пересекаются под конечным углом, то подынтегральное выражение в (V.40) имеет нуль первого порядка и $\zeta \sim -\ln|c - c^\pm|$, так что

$$c \sim c^\pm + C^\pm \exp(-\gamma^\pm \zeta), \quad \gamma^+ > 0, \quad \gamma^- < 0. \qquad (V.41)$$

Если допустить, что линии Γ_0 и Γ_∞ касаются друг друга, то подынтегральное выражение (V.40) имеет нуль более высокого порядка, и стремление концентрации к ее соответствующему предельному значению оказывается степенным:

$$c - c^\pm = O\left(|\zeta|^{-\nu^\pm}\right), \quad \nu^\pm > 0. \qquad (V.42)$$

Заметим, что для возможности построения структуры скачка, т. е. внутреннего решения задачи, обладающего требуемыми асимптотиками, принципиальное значение имеет выполнение условий

$$a(c) > a(c^-) + (\Delta a/\Delta c)(c - c^-), \quad c^+ < c < c^-,$$
$$a(c) < a(c^-) + (\Delta a/\Delta c)(c - c^-), \quad c^+ > c > c^-. \qquad (V.43)$$

Действительно, если это условие нарушается, не удается построить интегральную кривую, соединяющую точки M^+ и M^-, вдоль которой ζ изменилось бы монотонно. Таким образом, мы видим, что условия (V.43) необходимы и достаточны для существования внутреннего решения в виде равномерно движущейся волны концентрации. Поэтому, если ограничиться построением внешнего решения, из всевозможных вариантов разрывных решений, удовлетворяющих уравнениям баланса, нужно выбрать такие, для которых на каждом разрыве выполнены условия существования внутренней структуры (V.43). При этом получаем процедуру построения, описанную выше. Такие же соображения окажутся основными и в более сложных задачах, рассматриваемых в последующих параграфах.

§ 2. Вытеснение нефти растворами активных примесей

Понятие активной примеси. Основные уравнения. Рассмотрим двухфазное фильтрационное течение нефти и воды, предполагая, что вода (а возможно, и нефть) содержит некоторую добавку, способную влиять на гидродинамику потока. Такую добавку независимо от ее природы назовем активной примесью. Концентрацию примеси будем считать малой и не меняющей удельных объемов фаз. К активным примесям можно отнес-

ти практически все химические реагенты, применяемые для увеличения нефтеотдачи. При всем разнообразии механизмов их действия гидродинамическое описание роли таких примесей оказывается в сделанном предположении единым. Действительно, поскольку в силу независимости плотности фаз от содержания примеси уравнения баланса воды и нефти не изменяются, любое гидродинамическое действие активной примеси может сводиться лишь к изменению проницаемости k, фазовых проницаемостей f_i, вязкостей μ_i и капиллярного давления P_c. В свою очередь, это сводится, в силу сказанного в гл. IV, к влиянию активной примеси на проницаемость k (что существенно лишь при описании неодномерных процессов), на функцию распределения потоков F и на функцию P_c (что, в свою очередь, существенно в тех условиях, когда капиллярным скачком давления нельзя пренебречь). Таким образом, при описании одномерных крупномасштабных процессов достаточно знать лишь влияние активной примеси на функцию распределения потоков F. Отдельным важным вопросом становится влияние примеси на неравновесные процессы. Этот вопрос должен стать предметом специального рассмотрения; в настоящее время по нему имеются лишь первоначальные представления.

Примесь может находиться в трех состояниях — растворенном в воде, растворенном в нефти и сорбированном пористой средой. Поэтому полное количество ее в единице объема среды равно $(msc_1 + m(1-s)c_2 + a)$, а поток $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{q}$, где c_i — концентрация примеси в i-й фазе; a — количество примеси, сорбированное пористым скелетом; $\boldsymbol{q}$ — диффузионный поток. Уравнение баланса примеси имеет вид

$$[msc_1 + m(1-s)c_2 + a]_{,t} + \operatorname{div}(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{q}) = r, \quad \text{(V.44)}$$

где r — скорость генерации примеси в единице объема среды. Рассматривая крупномасштабные медленные процессы, следует пренебречь диффузионными потоками (см. § 1 данной главы), а распределение примеси между фазами считать термодинамически равновесным. Ограничимся в последующем рассмотрением одномерных движений. Тогда (при $r = 0$) имеем

$$c_1 = c, \quad c_2 = \varphi(c), \quad a = a(c, s), \quad F = F(s, c), \quad \text{(V.45)}$$

$$[msc + m(1-s)\varphi(c) + a(c, s)]_{,t} + U[cF + \varphi(c)(1-F)]_{,x} = 0. \quad \text{(V.46)}$$

Таким образом, задача о фронтальном вытеснении нефти раствором активной примеси в крупномасштабном (внешнем) приближении описывается системой уравнений (IV.33) и (V.46), содержащей три функции $F(s, c)$, $\varphi(c)$, $a(c, s)$, которые считаются заданными. Индивидуальность процесса проявляется лишь в конкретном виде этих функций.

Этот вывод при всей его простоте имеет принципиальное значение. Он определяет тот минимально необходимый объем эмпирической информации, который должен определяться до проведения расчетов. Полученная система уравнений позволяет описать такие основные процессы повышения нефтеотдачи, как вытеснение нефти

растворами водорастворимых поверхностно-активных веществ, водорастворимыми полимерами и карбонизированной водой. Далее анализ проводится в самых общих предположениях о виде входных функций $F(s, c)$, $\varphi(c)$, $a(c, s)$. Его результаты оказываются неожиданно простыми; они позволяют дополнительно ограничить требуемый объем исходной информации.

Фронтальное вытеснение нефти раствором активной примеси.

Автомодельные решения. Структура зоны вытеснения. Рассмотрим одномерное фронтальное вытеснение нефти из полубесконечного пласта раствором активной примеси. При сделанных предположениях задача сводится к решению системы уравнений:

$$ms_{,t} + U[F(s, c)]_{,x} = 0,$$
$$[mcs + m\varphi(c)(1-s) + a]_{,t} + U[cF + (1-F)\varphi(c)]_{,x} = 0, \quad (V.47)$$
$$0 \leqslant t < \infty, \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad U > 0$$

при начальных и граничных условиях

$$s(x, 0) = s_0, \quad c(x, 0) = c_0, \quad s(0, t) = s^0, \quad c(0, t) = c^0. \quad (V.48)$$

Возникшая ситуация близка к той, которая хорошо изучена в газовой динамике. Эта аналогия существенно облегчает исследование.

Анализ размерностей показывает, что решение этой задачи автомодельно и имеет вид

$$s = s(\xi); \quad c = c(\xi); \quad \xi = mx/Ut, \quad (V.49)$$

где $s(\xi)$, $c(\xi)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\xi \frac{ds}{d\xi} = \frac{dF(s, c)}{d\xi},$$
$$\xi \frac{d[cs + (1-s)\varphi(c) + a/m]}{d\xi} = \frac{d[cF + \varphi(c)(1-F)]}{d\xi} \quad (V.50)$$

при краевых условиях

$$s(0) = s^0, \quad c(0) = c^0, \quad s(\infty) = s_0, \quad c(\infty) = c_0. \quad (V.51)$$

При этом, как и в газовой динамике, ни исходная задача (V.47) — (V.48) для уравнений в частных производных, ни задача (V.50) — (V.51) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений не имеют, вообще говоря, классического решения, и необходимо допустить существование решений со скачками. На скачках должны выполняться соотношения баланса массы фаз и примеси, сводящиеся к условиям

$$mV[s^+ - s^-] = U[F(s^+, c^+) - F(s^-, c^-)], \quad (V.52)$$

$$mV\left[s^\pm + \frac{\varphi(c^+) - \varphi(c^-) + [a(c^+) - a(c^-)]/m}{c^+ - c^- + \varphi(c^-) - \varphi(c^+)}\right] =$$
$$= U\left[F^+ + \frac{\varphi(c^+) - \varphi(c^-)}{c^+ - c^- + \varphi(c^-) - \varphi(c^+)}\right]. \quad (V.53)$$

Здесь V — скорость скачка; s^-, c^-, s^+, c^+ — соответственно значения за скачком и до него. Скачки могут быть либо скачками насыщенности при неизменной концентрации — тогда существенно лишь условие (V.52), а (V.53) выполняется тождественно, либо сопряженными скачкам и концентрации и насыщенности.

Соответственно этому могут существовать скачки и в автомодельном решении, и условия на них получаются из общих условий заменой mV/U на ξ_j, где ξ_j — значение автомодельной переменной, соответствующее скачку.

При этом оказывается, что можно построить бесконечно много решений, удовлетворяющих уравнениям, начальным условиям и условиям на скачках. Физически осмысленное решение должно удовлетворять дополнительному условию устойчивости скачков. Каждый из них характеризуется пятью величинами — значениями скорости скачка V и значениями искомых величин перед (s^+, c^+) и за скачком (s^-, c^-). Эти пять величин связаны двумя условиями: (из двух условий (V.53) одно является следствием другого и условия (V.52)). Для того, чтобы устранить неопределенность, т. е. обеспечить устойчивость скачка, необходимы еще три дополнительных соотношения, которые прямо или косвенно отражают влияние начальных и граничных условий задачи. Это влияние передается вдоль характеристик исходной системы дифференциальных уравнений; каждая приходящая в данную точку характеристика дает одно соотношение между переменными (для системы (V.47) характеристики и соотношения на них выписаны ниже). В данном случае для устойчивости скачка необходимо, чтобы на него приходили три характеристики. В общем случае системы n уравнений сохранения типа (V.47) для переменных с n соотношениями на скачках для устойчивости скачка необходимо, чтобы на него приходила $(n+1)$ характеристика. Это условие устойчивости скачка используется в ряде задач теории ударных волн; строгое его доказательство известно для одного уравнения типа первого (V.47) и системы квазилинейных гиперболических уравнений, однако при условиях, которым системы рассматриваемого нами типа не удовлетворяют. Поэтому в дальнейшем это условие используется как эвристическое. Некоторым обоснованием этих условий служит анализ тонкой структуры скачков (см. § 3 гл. V). Приходящими на скачок из зоны за скачком будут при этом считаться характеристики, скорость которых не меньше скорости скачка; из зоны перед скачком — характеристики, скорость которых не больше скорости скачка. Иными словами, любая характеристика, имеющая равную со скачком скорость, считается приходящей на скачок [36]; характеристики, не удовлетворяющие этому условию, считаются уходящими.

Для системы (V.47), как легко убедиться, характеристики определяются соотношениями

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{U}{m}\frac{\partial F(s,c)}{\partial s};\ \frac{ds}{dt}\left[F_{,s} - \frac{F+\varphi'(c)(1-F)}{s+(1-s)\varphi'(c)+a'/m}\right] + F_{,c}\frac{dc}{dt} = 0;\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{U}{m}\frac{F+\varphi'(c)(1-F)}{s+(1-s)\varphi'(c)+a'(c)/m};\ \frac{dc}{dt} = 0. \quad \text{(V.54)}$$

Допустим, что задача решена. Тогда, зная функции $s(\xi)$ и $c(\xi)$, можно для каждого ξ вычислить $F(s, c)$, а затем, исключая из указанных зависимостей ξ и c, получить связь между F и s, поэтому каждому ξ отвечает некоторая точка на плоскости s, F в квадрате $(0,1) \times (0,1)$, а всему решению — кривая, которую в дальнейшем мы будем называть путем. Поскольку в силу первого уравнения (V.50) $\xi = dF/ds$, где производная берется вдоль пути (s, F), автомодельное решение однозначно восстанавливается, если он задан. *При этом скачкам решения соответствуют прямолинейные участки* пути, а угловым точкам — участки постоянства насыщенности; концентрация c на непрерывных участках решения неявно задана соотношением $F = F(s, c)$.

Решающую роль играет то обстоятельство, что путь на (s, F) — диаграмме удается построить, причем зачастую вполне элементарными средствами, до решения задачи. Особенно просто осуществляется построение в случае, если скачок концентрации распространяется без размазывания, т. е. существует подлежащее отысканию значение ξ_c такое, что

$$c = c^0, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_c, \quad c = c_0, \quad \xi_c < \xi < \infty \tag{V.55}$$

(достаточные условия распространения скачков концентрации без размазывания указаны ниже).

Используя уравнения (V.50), условия (V.52) и (V.53), и условие устойчивости скачков, можно дать элементарную графическую технику построения пути (s, F) и, следовательно, решения, обобщающую известный способ решения задачи Баклея — Леверетта, изложенный в гл. IV. В построении используются лишь кривые функции $F(s, c)$ при двух значениях: c — начальном и конечном — и значения функций φ и a, отвечающие этим двум значениям концентрации активной примеси. Это обстоятельство весьма важно, поскольку дополнительно резко ограничивает требуемый объем экспериментов для получения исходных данных к расчетам. Очевидно, решение состоит из (примыкающего ко входу пласта, $0 \leqslant \xi < \xi_j$) участка с $c = c^0$, удаленного участка $\xi > \xi_j$, в котором концентрация примеси сохраняет первоначальное значение, $c = c_0$, и скачка при $\xi = \xi_j$, на котором изменяются и концентрация, и насыщенность. Первому участку на (s, F) — диаграмме отвечает отрезок кривой $F(s, c^0)$, второму — отрезок кривой $F(s, c_0)$. Из условий (V.52) следует, что относительная скорость скачка $\xi_j = mV/U$ равна угловому коэффициенту отрезка, соединяющего точки s^+, F^+ и s^-, F^-, отвечающие значениям переменных по обе стороны скачка (т. е. точно так же, как и в обычной теории Баклея — Леверетта, только соответствующие точки не обязательно располагаются на кривой $F(s, c)$, отвечающей фиксированному значению концентрации примеси). Из условия (V.53) следует, что для скачка, происходящего с изменением концентрации, относительная скорость равна угловому коэффициенту прямой, соединяющей точки s^+, F^+ или s^-, F^- с «полюсом» $-s_p$, $-F_p$,

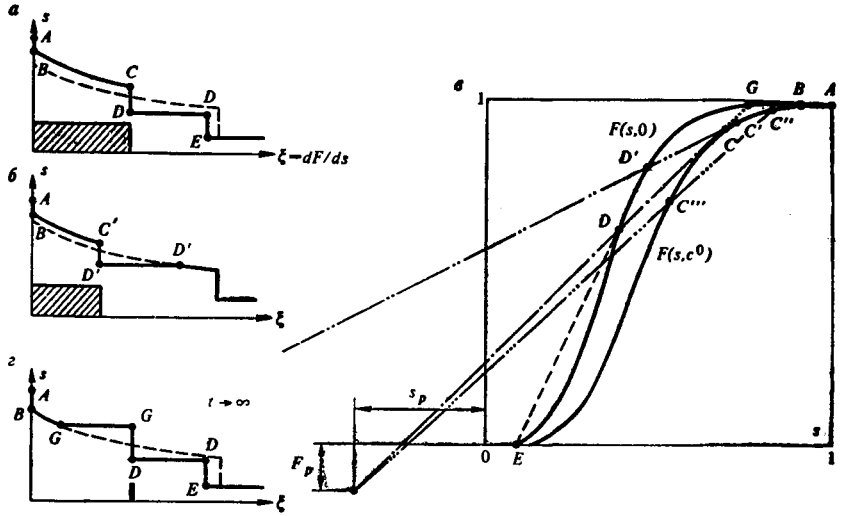


РИС. 59. К решению задачи о вытеснении нефти раствором полезной активной примеси

$$s_p = \frac{\Delta\varphi + \Delta A}{\Delta c - \Delta\varphi},\ F_p = \frac{\Delta\varphi}{\Delta c - \Delta\varphi};\ (\Delta X = X^+ - X^-);\ A = a/m. \quad \text{(V.56)}$$

Таким образом, точки s^+, F^+, s^-, F^- и $-s_p$, $-F_p$ лежат на одной прямой, и луч, отвечающий скачку, принадлежит пучку, проходящему через полюс ($-s_p$, $-F_p$). Чтобы выбрать из этого пучка единственный «нужный» луч, заметим, что им не может быть луч, пересекающий кривую $F(s, c^0)$ «сверху» (рис. 59, *в*), так как при этом вблизи точки пересечения значение автомодельной переменной за скачком больше, чем на самом скачке:

$$\xi^- = (dF(s, c^0)/ds)^- > \xi_j = (F^- - F^+)/(s^- - s^+), \quad \text{(V.57)}$$

и «решение» получается неоднозначным. Если мы допустим, что луч, соответствующий скачку, пересекает кривую $F(s, c^0)$ «снизу» (см. рис. 59, *в*), то в точке сопряжения

$$\xi^- = (dF/ds)^- < \xi_j. \quad \text{(V.58)}$$

При этом число характеристик, приходящих на разрыв, равно лишь двум, и нарушается условие устойчивости скачка (см. подробнее ниже). Таким образом, путь на плоскости (s, F), отвечающий автомодельному решению, обязательно содержит скачок по лучу, проходящему через полюс ($-s_p$, $-F_p$) и касающемуся кривой $F(s, c^0)$ в точке (s^-, c^-) (см. рис. 59). (Здесь считается, что, как это обычно бывает, такая точка касания единственна. Можно показать, что из нескольких точек касания при построении решения нужно выбрать верхнюю.) После определения положения сопряженного скачка концентрации и насыщенности («*c*-переход»), дальнейшее достраивание решений в областях двухфазного потока с постоянной концентрацией примеси производится очевидным образом

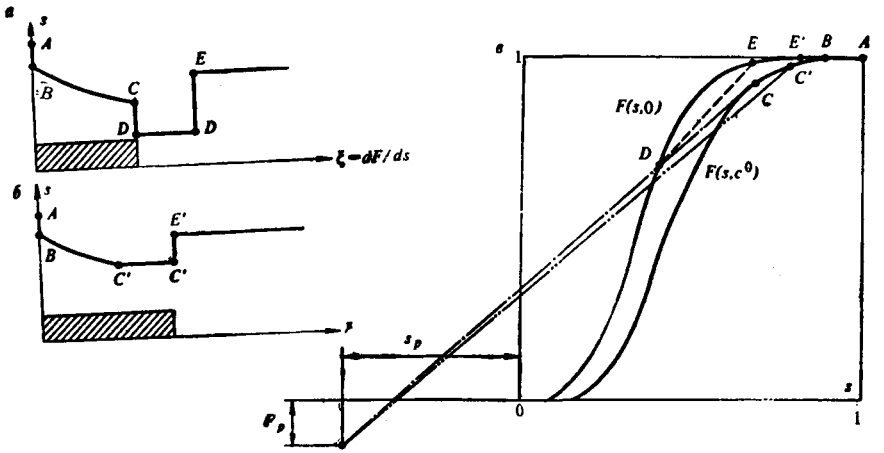


РИС. 60. К анализу процесса довытеснения нефти раствором активной примеси

по аналогии с теорией Баклея — Леверетта; два различных варианта возможных путей в (s, F) плоскости показаны на рис. 59.

На рис. 59 показаны соответствующие распределения насыщенностей в один момент времени для вытеснения водой (пунктир) и раствором активной примеси при малой (*а*) и значительной (*б*) сорбциях. Во всех случаях фронту примеси предшествует фронт вытеснения нефти водой; если сорбция значительна, он движется с той же скоростью, что и при вытеснении чистой водой. Это означает, что сильно сорбирующаяся примесь не изменяет момента обводнения и начальной стадии водного периода разработки; роль примеси при этом сводится к некоторому замедлению роста обводненности продукции на промежуточной стадии и увеличению полноты вытеснения нефти на заключительной стадии. Если примесь сорбируется слабо (*а*), то несколько затягивается безводный период эксплуатации и снижается обводненность продукции на начальной стадии обводнения.

Сходное построение позволяет проанализировать и применение активной примеси для довытеснения нефти из залежи, первоначально разработанной при заводнении (т. е. в качестве «третичного» метода). Построение соответствующего (s, F) пути показано на рис. 60, *в*, а характерные распределения насыщенностей по длине пласта — на рис. 60, *а*, *б*. Принципиально возможно образование двух типов решений. Один из них характеризуется отставанием фронта примеси от фронта вытеснения и образованием отчетливо выраженного нефтяного вала. Для решения второго типа характерно образование нефтяного плато с медленным снижением нефтенасыщенности на заднем его фронте; передний фронт плато совпадает с фронтом продвижения активной примеси (см. рис. 60, *б*). Какой именно из режимов осуществляется, можно определить на (s, F)-диаграмме. Если верхняя точка пересечения касательной к $F(s, c^0)$

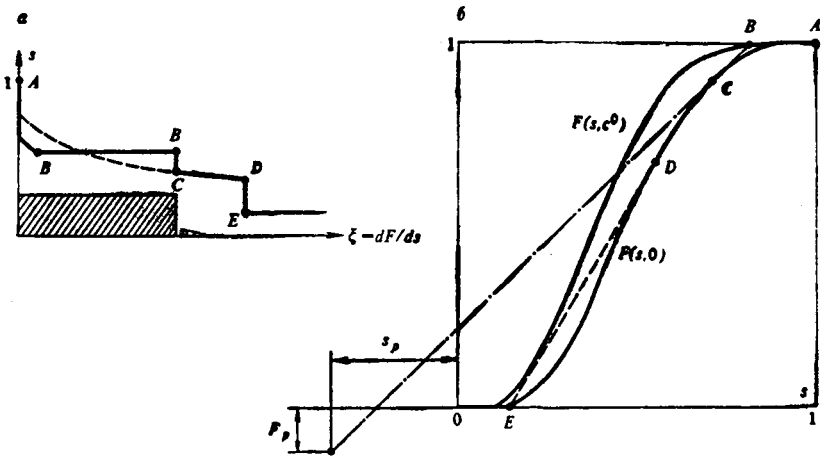


РИС. 61. К решению задачи о вытеснении нефти раствором вредной активной примеси

из точки $(-s_p, -F_p)$ с $F(s, c_0)$ лежит на участке $s > s_0$, то образуется нефтяной вал, в противном случае — нефтяное плато.

До сих пор речь шла о примеси, снижающей долю воды в водонефтяном потоке, т. е. снижающей относительную подвижность воды или увеличивающей относительную подвижность нефти. Ясно, что полезные активные примеси принадлежат именно к этому классу. Можно, однако, поставить вопрос о роли примесей, увеличивающих относительную подвижность воды. Соответствующая задача вытеснения легко решается построением рис. 61, *б* и приводит к распределению насыщенности, показанному на рис. 61, *а*. Наличие примеси не влияет на структуру передней части зоны вытеснения; прохождение фронта примеси, отстающего от фронта закачиваемой воды, сопровождается некоторым увеличением водонасыщенности и доли воды в потоке, которые затем длительно сохраняются на постоянном уровне.

Рассмотрим построение автомодельного решения в общем случае, когда не предполагается, что существует полный скачок концентрации примеси, хотя и считается по-прежнему что содержание примеси в нефти и в пористом скелете зависит только от концентрации ее в воде ($\varphi = \varphi(c)$, $a = a(c)$). В анализе нуждается только та часть решения (или соответствующего пути на s, F-диаграмме), на которой изменяется концентрация. Изменение концентрации может происходить в *c*-скачках или *c*-волнах (участках непрерывного изменения $c(\xi)$). Будем характеризовать *c*-скачки значениями концентрации по обе стороны скачка $[c^-, c^+]$, причем $c^\pm = c(\xi_f \pm 0)$; для определенности далее полагается $c^0 > c_0$.

Тогда возможны скачки четырех основных типов:

$$1)\ [c^0, c_0];\quad 2)\ [c^0, c^*];\ c_0 < c^* < c^0;\quad 3)\ [c^*, c_*],$$
$$c_0 < c_* < c^* < c^0;\quad 4)\ [c_*, c_0];\ c_0 < c_* < c^0.$$

Запишем соотношения на скачках в виде

$$\xi_j = \frac{F^- - F^+}{s^- - s^+} = \frac{F^\pm + (\Delta\varphi/\Delta c)\,(1 - \Delta\varphi/\Delta c)^{-1}}{s^\pm + (\Delta\varphi/\Delta c + \Delta A/\Delta c)\,(1 - \Delta\varphi/\Delta c)^{-1}}. \qquad \text{(V.59)}$$

Здесь $F^\pm = F(s^\pm,\ c^\pm)$; каждое из уравнений (V.59) является следствием двух остальных. Обозначим через $\xi^\pm_{1,2}$ безразмерные характеристики скорости по обе стороны скачка:

$$\xi^\pm_1 = F_{,s}(s^\pm,\ c^\pm),$$

$$\xi^\pm_2 = \frac{F^\pm + \varphi'^\pm/(1-\varphi'^\pm)}{s^\pm + (\varphi'^\pm + A'^\pm)/(1-\varphi'^\pm)}. \qquad \text{(V.60)}$$

Из условия устойчивости скачка либо

$$\min \xi^-_{1,2} \leqslant \xi_j \leqslant \min \xi^-_{1,2},\quad \xi_j < \max \xi^+_{1,2}, \qquad \text{(V.61)}$$

либо

$$\max \xi^+_{1,2} \leqslant \xi_j \leqslant \max \xi^-_{1,2},\quad \xi_j < \min \xi^-_{1,2}. \qquad \text{(V.62)}$$

Заметим, что, если к скачку примыкают участки непрерывного изменения переменных (s- или c-волны), то из условия однозначности решения предельные значения автомодельной переменной в них удовлетворяют неравенству

$$\xi^- \leqslant \xi_j \leqslant \xi^+. \qquad \text{(V.63)}$$

Учитывая, что на c- и s-волнах значение автомодельной переменной совпадает с характеристической скоростью, из (V.62) и (V.63) находим, что реализуется одно из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
&\xi^+ = \max \xi^+_{1,2} > \xi^- = \min \xi^-_{1,2} = \xi_j,\\
&\xi^- = \min \xi^-_{1,2} = \xi_j = \min \xi^+_{1,2} = \xi^+,\\
&\xi^- = \max \xi^-_{1,2} = \max \xi^+_{1,2} = \xi^+ = \xi_j,\\
&\xi^- = \min \xi^-_{1,2} < \xi^+ = \max \xi^+_{1,2} = \xi_j < \max \xi^-_{1,2}.
\end{aligned} \qquad \text{(V.64)}$$

Анализируя расположение характеристик обоих семейств, не трудно прийти к заключению, что для типичного расположения кривых $F(s, c)$, показанного на рис. 59, $(c^0 - c_0)F_{,c} < 0$, при обычных значениях s_0 и s^0 решение может содержать лишь скачки, для которых верны первые два соотношения (V.64). Рассмотрим вначале скачок типа $[c^0, c^*]$. Для него, очевидно, верно второе условие (V.64). Тогда в дополнение к уравнениям (V.59) имеем:

$$\xi_j = \xi^+ = \frac{F^+ + \varphi'_+/(1-\varphi'_+)}{s^+ + (\varphi'_+ + A'_+)/(1-\varphi'_+)} = \xi^- = F^-_{,s}(s,\ c^0). \qquad \text{(V.65)}$$

Из (V.65) и (V.59) находим систему уравнений для определения $c^+ = c^*$, s^+, s^-, ξ_j. Ограничимся пока вариантами, когда эта система уравнений решается элементарными средствами. Пусть

$$\varphi(c) = \varphi_0 c,\quad \varphi'(c) = \Delta\varphi/\Delta c = \varphi_0 = \text{const}. \qquad \text{(V.66)}$$

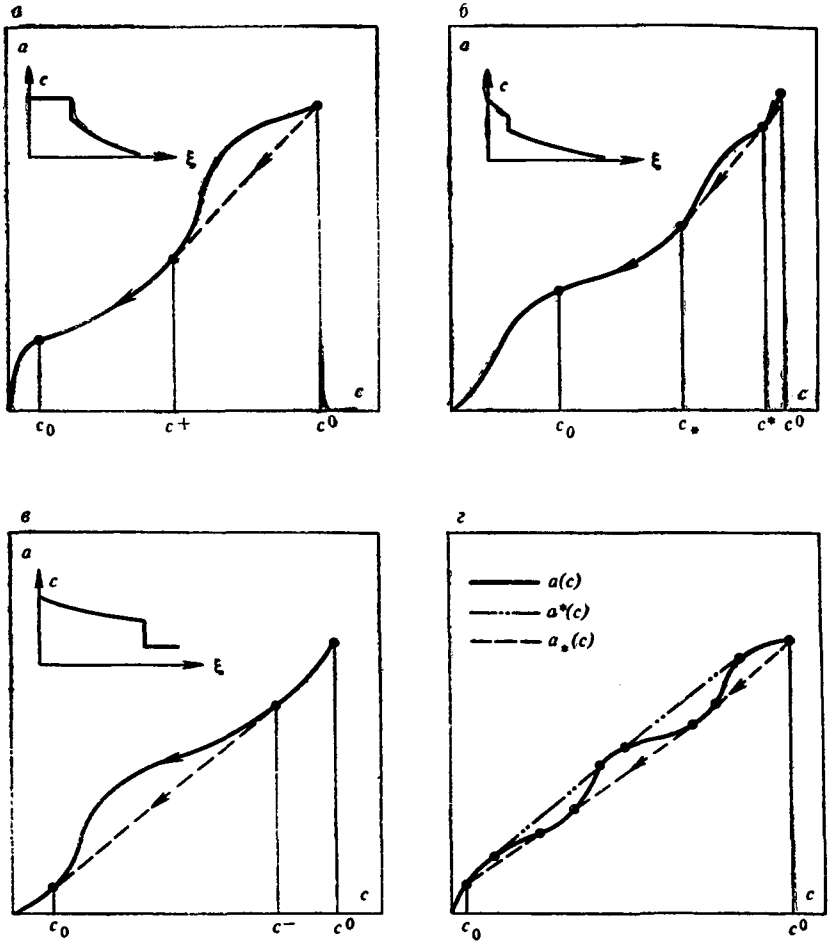


РИС. 62. К определению структуры решения по виду изотермы сорбции

Тогда из (V.65) и (V.59) имеем для c^+ уравнения

$$\frac{F^+ + \varphi_0/(1-\varphi_0)}{s^+ + (\varphi_0 + \Delta A/\Delta c)/(1-\varphi_0)} = \frac{F^+ + \varphi_0/(1-\varphi_0)}{s^+ + [\varphi_0 + A'(c^+)]/(1-\varphi_0)},$$

откуда

$$a'(c^+) = [a^+ - a(c^0)]/(c^+ - c^0), \qquad \text{(V.67)}$$

а c^+ определяется как точка касания кривой $a(c)$ касательной, проведенной из точки $(c^0, a(c^0))$ (рис. 62). После нахождения c^+ с помощью следующего из (V.59) и (V.65) уравнения

$$F_{,s}(s^-, c^0) = \frac{F^- + \varphi_0 (1-\varphi_0)^{-1}}{s^- + (\varphi_0 + \Delta A/\Delta c)(1-\varphi_0)^{-1}} \qquad \text{(V.68)}$$

определяется s^- как абсцисса общей точки кривой $F(s, c^0)$ и касательной, проведенной к ней из точки $(-s_p, -F_p)$,

$$s_p(c^*) = \frac{\varphi_0 + \Delta A/\Delta c}{1-\varphi_0}; \quad F_p(c^*) = \frac{\varphi_0}{1-\varphi_0} \tag{V.69}$$

(см. рис. 59). По угловому коэффициенту этой касательной определяется ξ_j, а по точке ее пересечения с кривой $F(s, c^*)$ — значение s^+. Наконец, в области $\xi > \xi_j$ имеем участок непрерывного изменения концентрации (c-волну).

Пусть решение содержит скачок третьего типа $[c^*, c_*]$. Из соотношений (V.59) и условий (V.64) получаем

$$\xi_j = \frac{F^\pm + \Delta\varphi/(\Delta c - \Delta\varphi)}{s^\pm + (\Delta\varphi + \Delta A)/(\Delta c - \Delta\varphi)} = \xi_2^\pm = \\ = \frac{F^\pm + \varphi'^\pm (1-\varphi'^\pm)^{-1}}{s^\pm + (\varphi'^\pm + A'^\pm)(1-\varphi'^\pm)^{-1}}. \tag{V.70}$$

Если $\varphi = \varphi_0 c$, по соотношениям (V.70) получаем

$$a'(c^+) = a'(c^-) = [a(c^+) - a(c^-)]/(c^+ - c^-). \tag{V.71}$$

c^+ и c^- — абсциссы точек кривой $a(c)$, имеющих общую касательную (см. рис. 62); ξ_j определяется как характеристическая скорость в c-волне, приходящей в точку M^- $(s^-, F(s^-, c^-)$; значение s^+ определяется как абсцисса точки M^+ пересечения прямой, проведенной через точку M^- с угловым коэффициентом ξ_j; с кривой $F(s^+, c^+)$. Последующая c-волна строится из точки M^+ в соответствии с уравнением

$$\frac{dF}{ds} = \frac{F + \varphi'(1-\varphi')^{-1}}{s + (\varphi' + A')/(1-\varphi')}. \tag{V.72}$$

Наконец, для скачка четвертого типа имеем $c^+ = c^0$;

$$\xi_j = \frac{F^\pm + \Delta\varphi(\Delta c - \Delta\varphi)^{-1}}{s^\pm + (\Delta\varphi + \Delta A)(\Delta c - \Delta\varphi)^{-1}} = \xi_2^- = \frac{F^- + \varphi'_-/(1-\varphi'_-)}{s^- + (\varphi'_- + A'_-)/(1-\varphi'_-)}. \tag{V.73}$$

В частности, при линейной функции $\varphi(c)$ значение c^- находится как общая точка кривой $a(c)$ с касательной, проведенной к ней из точки c_0, $a(c_0)$ (см. рис. 62). Таким образом, в рассматриваемом случае вся структура c-перехода определяется видом изотермы сорбции $a(c)$. Рассмотримфункцию $a(c)$ на отрезке $\Delta[c_0, c^0]$ и построим на нем выпуклую и вогнутую оболочки $a(c)$: $a^*(c)$ и $a_*(c)$ — минимальную невогнутую функцию, значения которой не меньше $a(c)$, и максимальную невыпуклую функцию, значение которой не больше $a(c)$:

$$a^*(c) = \max_{c_1, c_2 \in \Delta} \left[a(c_1) + \frac{a(c_1) - a(c_2)}{c_1 - c_2}(c - c_1) \right], \\ a_*(c) = \min_{c_1, c_2 \in \Delta} \left[a(c_1) + \frac{a(c_1) - a(c_2)}{c_1 - c_2}(c - c_1) \right]. \tag{V.74}$$

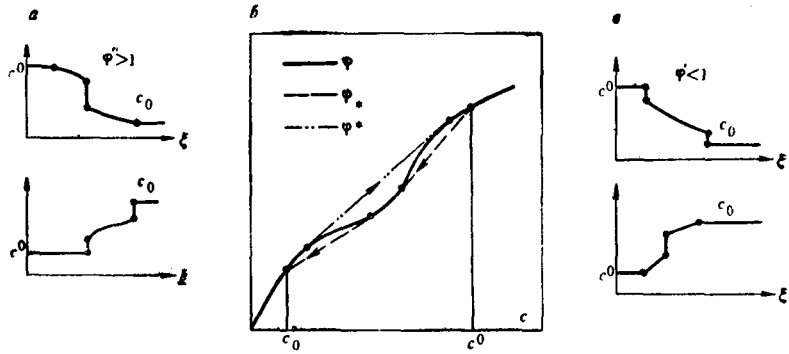


РИС. 63. К определению структуры решения по виду изотермы $\varphi(c)$.

График функции $a_*(c)$ состоит из выпуклых дуг, общих с графиком $a(c)$, и прямолинейных участков. Прямолинейные участки отвечают c-скачкам; дуги — c-волнам. Построение решения сводится к последовательному (начиная с малых ξ) построению пути на (s, F) диаграмме; при этом c-скачки находятся при помощи элементарного графического построения, а c-волны — численным интегрированием.

Аналогичная процедура построения решения проходит при $c^0 < c_0$, $F_{,c} > 0$; структура c-перехода при этом определяется видом функции $a^*(c)$.

Столь же просто устанавливается заранее структура c-перехода при произвольной функции $\varphi(c)$, если $a(c) \equiv 0$. При этом необходимо, чтобы

$$\Delta\varphi/\Delta c = \varphi'(c^{\pm}). \qquad \text{(V.75)}$$

Здесь знак $+$ берется для скачков второго типа, знак $-$ для скачков четвертого типа; для скачков третьего типа берутся уравнения с обоими знаками. Таким образом, при $a(c) \equiv 0$ структура решения определяется видом вспомогательных функций $\varphi^*(c)$ и $\varphi_*(c)$ (рис. 63) при $c_0 > c^0$ и $c^0 > c_0$ соответственно, при этом предполагается, что функции $F(s, c)$ имеют обычный вид

$$\max_s [F(s, c) - s] > 0 > \min_s [F(s, c) - s].$$

Если $F_{,c}(c^0 - c_0) > 0$, то проходит аналогичная техника нахождения автомодельных решений (см. рис. 59), с той лишь разницей, что в этом случае построение следует начинать с больших значений ξ и пользоваться соотношениями (V.64).

Изложенная процедура гарантирует построение одного автомодельного решения с устойчивыми скачками, но не гарантирует отсутствие других устойчивых решений.

Рассмотрим кратко возможности построения автомодельного решения в общем случае, когда $\varphi(c)$ — произвольная возрастающая функция, а количество сорбированного вещества зависит не только от концентрации c, но и от насыщенности, $a = a(c, s)$. Ограничимся основным случаем $F_{,c}(c^0 - c_0) < 0$. Прямое обобщение изложенной

процедуры заключается в том, что решение строится «слева направо», т. е. от малых значений ξ.

Пусть решение «достроено» до точки (s^-, c^-, F^-), $\xi^- = \min \xi_{1,2}^-$. Будем искать его продолжение как «скачок» (может быть, бесконечно малый скачок), обеспечивающий минимальное значение скорости ξ_f.

Из условий на нем

$$\xi_f = \frac{F^+ - F^-}{s^\pm - s^-} = \frac{F^\pm + \Delta\varphi\,(\Delta c - \Delta\varphi)^{-1}}{s^+ + (\Delta\varphi + \Delta A)\,(\Delta c - \Delta\varphi)^{-1}} = \xi^- \qquad \text{(V.76)}$$

получаем два независимых уравнения для определения c^+ и s^+. Если единственное решение этих уравнений есть $c^+ = c^-$, $s^+ = s^-$, данный участок решения представляется s- или c-волной и следующий шаг должен быть бесконечно малым (практически равным шагу численного интегрирования) в соответствии с уравнением

$$dF/ds = \xi^-. \qquad \text{(V.77)}$$

Если же система (V.76) имеет нетривиальное решение $c_0 < c^+ < c^-$, s^+, то производится скачок в точку s^+, $F(s^+, c^+)$, после чего построение решения продолжается по тому же алгоритму вплоть до достижения концентрации c_0. Если $F_{,c}(c^0 - c_0) > 0$, то аналогичное построение проводится справа налево (от бо́льших значений ξ к меньшим) с выбором на каждом шаге $\xi^+ = \xi_f = \max(\xi_1 \xi_2)$.

Фронтальное вытеснение. Неавтомодельные решения. Вытеснение оторочкой активной примеси. Запаздывающее воздействие. Анализ автомодельных движений не исчерпывает гидродинамического исследования процессов вытеснения нефти растворами активных примесей. Из числа неавтомодельных движений, которые также удается изучить в рамках изложенного общего подхода, наибольший практический интерес представляют вытеснение нефти оторочкой раствора активной примеси и закачка активного агента с запаздыванием воздействия на пласт. В настоящее время эти задачи интенсивно исследуются. Рассмотрим методику решения и ее возможности.

Оторочкой обычно называют имеющую конечный объем порцию раствора активного агента, который закачивается на начальной стадии вытеснения, а затем проталкивается по пласту водой. Основной смысл использования оторочек состоит в экономии дорогостоящих химических реагентов при сохранении повышенной нефтеотдачи с применением химических реагентов при заводнении. Формально задача о фронтальном вытеснении нефти оторочкой активной примеси в крупномасштабном приближении сводится к решению системы уравнений (V.47) при начальных и граничных условиях.

$$s(x, 0) = s_0, \quad c(x, 0) = 0;$$

$$F(s, c)|_{x=0} = 0, \quad c(0, t) = c^0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad c(0, t) = 0, \; t > T. \qquad \text{(V.78)}$$

Очевидно, что до момента $t = T$ решение сформулированной задачи совпадает с рассмотренным автомодельным решением. В момент

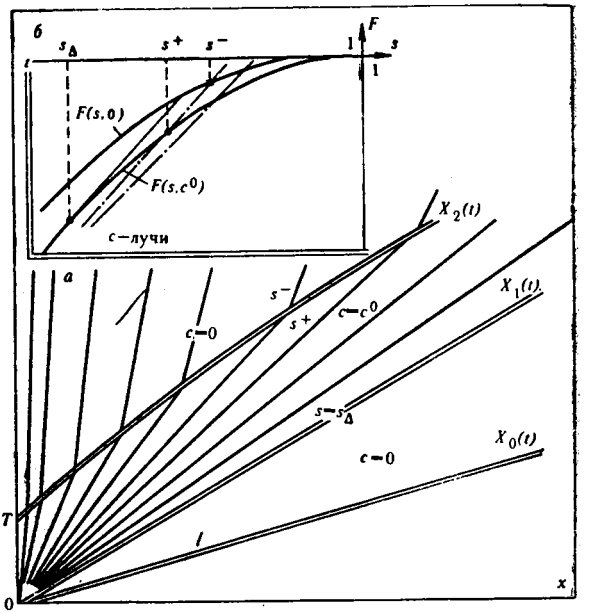


РИС. 64. К задаче о вытеснении нефти оторочкой активной примеси

$t = T$ на границе $x = 0$ появляется скачок концентрации. При $t > T$ распространяющееся от него возмущение взаимодействует с центрированной волной, примыкающей в автомодельном решении ко входу пласта. Ограничимся простейшим вариантом задачи, когда изотермы сорбции $a(c)$ и распределения примеси $\varphi(c)$ линейны:

$$a = m\Gamma c, \quad \varphi = \varphi_0 c. \tag{V.79}$$

В этом случае, как легко установить, прямой и обратный скачки концентрации распространяются без искажения; мгновенная скорость скачка в каждый момент

$$V = \frac{U}{m}\frac{F^+ - F^-}{s^+ - s^-} = \frac{U}{m}\frac{F^\pm + \varphi_0/(1-\varphi_0)}{s^\pm + (\varphi_0 + \Gamma)/(1-\varphi_0)}. \tag{V.80}$$

Таким образом, на (s, F)-диаграмме каждому сопряженному s, c скачку соответствует, как и в автомодельном решении, переход по лучу, проходящему через полюс $(-s_p, -F_p)$, с одной из кривых $F(s, 0)$, $F(s, c^0)$ на другую.

Проведем на плоскости (x, t) траектории скачков: $X_0(t)$ — переднего скачка насыщенности; $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — переднего и заднего сопряженных скачков насыщенности и концентрации (рис. 64). Рассмотрим траекторию заднего скачка, распространяющегося по центрированной волне отвечающей автомодельному решению так, что

$$X_2 = (U/m)\,F_{,s}(s^+, c^0)\,t, \tag{V.81}$$

где s^+ — насыщенность перед скачком. С другой стороны, из условий (V.80)

$$\frac{dX_2}{dt} = \frac{U}{m}\frac{F(s^+, c^0) + F_p}{s^+ + s_p}. \tag{V.82}$$

Подставляя (V.82) в (V.81), получим

$$t = T \exp\left[\int_{s^*}^{s^+} \frac{F''(s, c^0)\, ds}{F'(s, c^0) - [F(s, c^0) + F_p]/(s - s_p)}\right]. \qquad \text{(V.83)}$$

Соотношение (V.83) устанавливает зависимость от времени насыщенности s^+ перед вторым сопряженным скачком. Координаты и скорость скачка определяются соотношениями

$$X_2 = (U/m) F'(s^+, c^0)\, t, \quad V = (U/m)[F(s^+) + F_p](s^+ + s_p)^{-1}. \qquad \text{(V.84)}$$

Из (V.83) и (V.84) видно, что по мере распространения второго скачка его скорость постепенно увеличивается и стремится к скорости первого сопряженного скачка $F'(s_\Delta)$; насыщенность перед фронтом постепенно убывает и стремится к s_Δ при $t \to \infty$; она в каждой точке меньше скорости соответствующей характеристики $F'(s^+)$. Отсюда следует, что второй скачок не влияет на условия распространения первого сопряженного скачка и на решение при $x > X_1(t)$.

Расстояние между скачками равно

$$L(t) = X_1(t) - X_2(t) = (U/m)\, t\, [F'(s_\Delta) - F'(s^+)]. \qquad \text{(V.85)}$$

Используя (V.83), легко показать, что существует конечный предел $L(\infty) = L_*$. Таким образом, асимптотически при $t \to \infty$ формируется стационарная оторочка, движущаяся со скоростью, равной скорости первого сопряженного скачка $V_1 = (U/m) F'(s_\Delta)$. Чтобы построить решение в области за вторым скачком, заметим, что из последнего условия (V.80) можно найти величину $s^-(t)$ — проще всего это сделать графически (см. рис. 64). Легко видеть из рис. 64, что за скачком ($x = X_2 - 0$) оба семейства характеристик уходят со скачка. Поэтому решение в области $x < X_2(t)$ определяется полностью начальными данными на линии $x = X_2(t)$ и описывается уравнением

$$x(t, s) = X_2(t_2, s) + F'(s, 0)\,(U/m)\,(t - t_2(s)). \qquad \text{(V.86)}$$

Здесь в качестве параметра на линии $x = X_2(t)$ взята насыщенность непосредственно за скачком, $s = s^-$; X_2 и t_2 — соответствующие значения координаты скачка и времени.

Естественно поставить вопрос об асимптотике решения при больших временах. Ее можно получить, рассматривая предел полученного выше решения. Можно, однако, рассуждать и по-другому. Как было показано, со временем оторочка стабилизируется и начинает двигаться с постоянной скоростью. Поэтому будем искать в подвижной системе координат, связанной с оторочкой, стационарное решение вида

$$s = S(\eta), \quad c = C(\eta), \quad \eta = x - Vt,$$
$$C(\eta) = 0, \quad |\eta| > l, \quad C(\eta) = c^0, \quad |\eta| < l. \qquad \text{(V.87)}$$

Подставляя выражения (V.87) в основную систему (V.47), получим:

$$-mV\frac{dS}{d\eta}+U\frac{dF}{d\eta}=0,\quad -UF+mVS=\text{const}_1,$$

$$-V\frac{d\,[mcs+m(1-s)\varphi+a]}{d\eta}+U\frac{d\,[cF+\varphi(1-F)]}{d\eta}=0, \qquad (V.88)$$

$$-[mcs+m\varphi(1-s)+a]\,V+U\,[cF+\varphi(1-F)]=\text{const}_2.$$

Как нетрудно видеть, условия (V.88) показывают, что значения насыщенностей перед оторочкой s^+ и за ней s^- связаны между собой и со скоростью V условием на скачке:

$$mV/U=(F^+-F^-)/(s^+-s^-). \qquad (V.89)$$

При этом значение s внутри оторочки определяется пересечением прямой, соединяющей точки $M^+(s^+, F^+)$ и $M^-(s^-, F^-)$ с кривой $F=F(s, c^0)$.

Второе уравнение (V.88) показывает, что прямая M^+M^- проходит через полюс $(-s_p, -F_p)$. Наконец, учитывая условия устойчивости переднего и заднего фронтов оторочки, легко убедиться, что прямая M^+M^- должна быть касательной к кривой $F(s, c^0)$, чем положение этой прямой и всех элементов решения определяется однозначно. Построенное инвариантное решение типа равномерно распространяющейся волны с точки зрения задачи в целом представляет собой внутреннюю асимптотику решения, отвечающую малости объема оторочки или — что эквивалентно — большим временам наблюдения. Внешним решением задачи при этом, как легко видеть, будет решение задачи двухфазной фильтрации в отсутствие активной примеси ($c=0$) с дополнительным скачком насыщенности, обусловленным наличием тонкой оторочки. Положение этого скачка определяется величинами s^+ и s^-, определяемыми из внутреннего решения. На (s, F)-диаграмме ему соответствует путь $ABGDE$. Полученный результат заслуживает особого комментария. Дело в том, что автомодельное решение задачи вытеснения нефти водой, соответствующее пути $ABGDE$, существует и в отсутствие активной примеси; однако оно неустойчиво. Таким образом, роль тонкой оторочки активной примеси формально сводится к стабилизации неустойчивого решения, отвечающего рис. 59, *г*. При этом, очевидно, ширина оторочки имеет второстепенное значение, а главную роль играет та максимальная степень снижения подвижности воды, которая достигается в оторочке. Если активная примесь «полезная», то $F_{,c}<0$, и последнее утверждение означает, что целесообразно использовать максимальные значения концентрации примеси в оторочке.

Та же техника позволяет проанализировать влияние запаздывания закачки активного агента на показатели разработки. Запаздывание достаточно часто происходит по техническим причинам. Будем считать, что пласт, первоначально однородно насыщенный нефтью,

с момента $t = 0$ разрабатывается заводнением, а при $t = T$ начинается закачка активной примеси. Этим условиям отвечает задача

$$s(x, 0) = s_0, \quad c(x, 0) = c_0, \quad s(0, t) = s^0[c(0, t)];$$
$$c(0, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad c(0, t) = c^0, \quad T \leqslant t < \infty \qquad \text{(V.90)}$$

для уравнений (V.47).

Вплоть до $t = T$ имеем обычное решение Баклея — Леверетта в виде центрированной волны, заканчивающейся скачком:

$$s = s(\xi), \quad \xi = xm/Ut, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0, \quad s = s_0, \quad \xi > \xi_0. \qquad \text{(V.91)}$$

При $t = T$ от границы пласта внутрь него начинает перемещаться поверхность разрыва концентрации и насыщенности, причем мы будем полагать выполненными условия распространения скачка без размывания, так что

$$c = c_0 = 0, \quad x > X_c(t), \quad c = c^0, \quad x < X_c(t). \qquad \text{(V.92)}$$

Из соотношений на сопряженном скачке (V.52) — (V.53) следует, что на (s, F)-диаграмме скачок соответствует переходу с кривой $F(s, 0)$ на кривую $F(s, c^0)$ по c-лучу, проходящему через полюс $(-s_p, -F_p)$ (рис. 65). Последовательным положениям скачков отвечает переход по пучку c-лучей справа налево, начиная от положения B, отвечающего образованию скачка, и вплоть до предельного положения $GC'D'$. При этом из рис. 65 видно, что скорость скачка все время выше характеристических скоростей перед ним. Скачок взаимодействует с центрированной волной, а распределение насыщенности за ним определяется уходящими с него характеристиками. Учитывая это обстоятельство и условия на скачке, имеем:

$$dX_c/dt = (U/m)[F(s^+, 0) + F_p]/(s^+ + s_p),$$
$$X_c = (U/m)F'(s^+, 0)\,t, \quad X_c(T) = 0. \qquad \text{(V.93)}$$

Отсюда получаем

$$t = T \exp\left[-\int_{s^+}^{s^*} \frac{F''(s, 0)\,ds}{[F(s, 0) + F_p](s + s_p)^{-1} - F'(s, 0)}\right]. \qquad \text{(V.94)}$$

При этом значение насыщенности за скачком s^- определяется из уравнения

$$F(s^-(t), c^0) = (F(s^+(t), 0) + F_p)\frac{s^-(t) + s_p}{s^+(t) + s_p}. \qquad \text{(V.95)}$$

Решение (V.94) — (V.95) сохраняет смысл до тех пор, пока c-луч не совпадет с касательной к кривой $F(s, c_0)$ $s^+ = s_\infty^+$ (см. рис. 65). После этого скорость c-скачка перестает меняться, и перед ним формируется дополнительный «обратный» s-скачок, взаимодействующий с первоначальной центрированной волной. На (s, F)-диаграмме ему отвечает переход из фиксированной точки D' в переменную

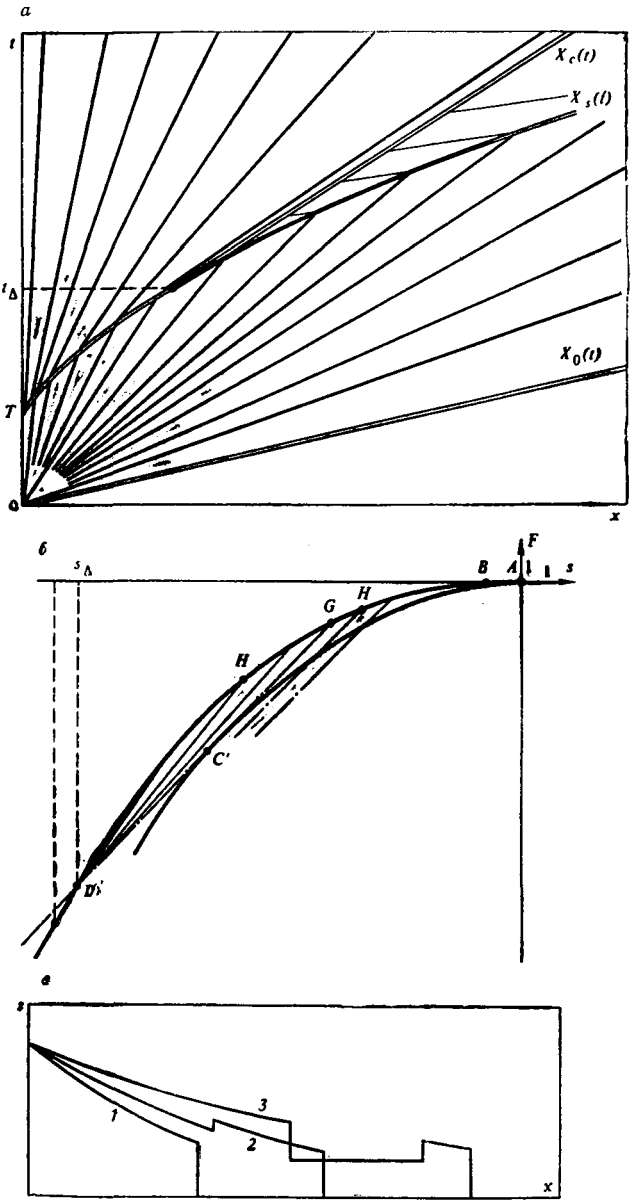


РИС. 65. К расчету закачки активной примеси с запаздыванием воздействия на пласт

точку H, соответствующую значениям параметров в центрированной волне. Поэтому движение этого скачка определяется уравнениями

$$dX_s/dt = (U/m)\,[F(s^+) - F(s_\Delta)]/(s^+ - s_\Delta);\quad F(s) \equiv F(s,\,0),$$
$$X_s = (U/m)\,F'(s^+)\,t,\quad X_s(t_\Delta) = X_c(t_\Delta),\quad s^+(t_\Delta) = s_\Delta. \qquad \text{(V.96)}$$

Отсюда имеем

$$t = t_\Delta \exp\left[-\int_{s+}^{s_\Delta} \frac{F''(s)\,ds}{[F(s) - F(s_\Delta)]\,(s - s_\Delta)^{-1} - F'(s)} \right]. \qquad \text{(V.97)}$$

Ограничимся здесь только случаем, когда насыщенность s_Δ больше фронтальной в первичной центрированной волне, отвечающей решению Баклея—Леверетта. При этом решение (V.97) сохраняет смысл вплоть до $t = \infty$; амплитуда обратного скачка асимптотически стремится к нулю, а решение асимптотически стремится к автомодельному решению, отвечающему $T = 0$. Эволюция мгновенных профилей насыщенности во времени показана схематически на рис. 65, *в*.

Изложенный в этом пункте материал, в основном, содержится в [18]; подход к исследованию неавтомодельных задач берет начало от работы П. Г. Бедриковецкого по вытеснению нефти оторочками активных примесей [8]; задача запаздывающего вытеснения исследована О. М. Алишаевой и А. Ф. Зазовским.

§ 3. Эффекты диффузии и неравновесности в задачах вытеснения нефти раствором активной примеси

Так же, как и в «обычной» теории двухфазной фильтрации (см. гл. IV), крупномасштабное приближение оказывается недостаточным там, где возникают области больших локальных градиентов основных переменных, т. е. вблизи скачков насыщенности и концентрации, а также в гетерогенных (трещиновато-пористых и слоисто-неоднородных) пластах. Анализ возникающих при этом ситуаций с учетом диссипативных-капиллярных и диффузионных эффектов является ключевым для понимания механизмов, формирующих нефтеотдачу в реальных пластах. В данном параграфе кратко рассмотрены некоторые из них.

Тонкая структура сопряженного скачка концентрации активной примеси и насыщенности. Выпишем систему уравнений одномерного вытеснения нефти раствором активной примеси в пренебрежении ее влиянием на плотности фаз, но с учетом диссипативных эффектов; примесь будем считать водорастворимой:

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + U\frac{\partial F}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(\Phi\Omega) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(msc + a) + U\frac{\partial}{\partial x}(cF) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(c\Phi\Omega) = \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right);$$

$$F = f_1[f_1 + \mu_1 f_2/\mu_2]^{-1}; \quad \Omega \equiv P_{,s}S_{,x} + P_{,c}c_{,x}; \quad \Phi = Ff_2/\mu_2. \qquad \text{(V.98)}$$

Параметры ε и ν характеризуют отношения капиллярного давления к полному гидродинамическому перепаду давления в пласте и отношение времени переноса частицы фильтрационным потоком

ко времени диффузии вдоль пласта и обычно малы (см. гл. IV и гл. V). Если положить $\varepsilon = \nu = 0$, то придем к рассмотренной выше задаче крупномасштабного приближения. Пренебрежение малыми параметрами незаконно вблизи скачков внешнего (крупномасштабного) приближения. При малых ε и ν анализ решения в окрестности скачков сводится к построению (по аналогии с тем, как мы это делали уже не раз) внутреннего решения задачи. При этом новые элементы появляются лишь при рассмотрении тонкой структуры сопряженных (s, c) скачков, чем мы и ограничимся здесь.

Перейдем в уравнениях (V.98) к системе координат, движущейся вместе со скачком, введя «быстрые» переменные

$$\eta = (x - Vt)/\varepsilon, \quad \tau = t/\varepsilon, \tag{V.99}$$

и будем искать нетривиальное стационарное решение, удовлетворяющее условиям сращивания с внешним решением: $s(\pm\infty) = s^{\pm}$, $c(\pm\infty) = c^{\pm}$. При этом предполагается, что величины V, $s^{\pm}$, $c^{\pm}$ определены при построении глобального внешнего решения (см. гл. V) и, в частности, удовлетворяют условиям на скачке (V.51), (V.52), (V.53).

Для искомого стационарного решения $s(\eta)$, $c(\eta)$ из (V.98) с учетом условий (V.51) — (V.52) имеем систему

$$\begin{gathered} ds/d\eta = -H(c)\,[B(s, c)\,Y(s, c) + (c - c^-)\,Z(c)]/G(s, c), \\ dc/d\eta = H(c)\,(c - c^-)\,Z(c), \\ Z = F^- - \xi_j\,[s^- + (a - a^-)/m\,(c - c^-)]; \quad \xi_j = mV/U, \\ Y = F - F^- - \xi_j\,(s - s^-); \quad H = \varepsilon V/\nu D; \quad G = P_{,s}/P_{,c}; \quad B = \nu D/\varepsilon\Phi P_{,c}. \end{gathered} \tag{V.100}$$

Системе (V.100) на фазовой плоскости (s, c) соответствует уравнение

$$\frac{dc}{ds} = -\frac{G(s, c)\,(c - c^-)\,Z(c)}{[(c - c^-)\,Z(c) + B(s, c)\,Y(s, c)]}. \tag{V.101}$$

Особыми точками этого уравнения являются точки $M^+(s^+, c^+)$ и $M^-(s^-, c^-)$; искомому решению внутренней задачи отвечает траектория, соединяющая эти особые точки. Условия существования внутреннего решения тесно связаны с условиями устойчивости скачка во внешнем решении, хотя и не сводятся к ним. Покажем это на одном примере (остальные случаи допускают аналогичное рассмотрение). Будем рассматривать структуру скачка «полезной» активной примеси, когда в скачке возрастают концентрация примеси и насыщенность. Будем полагать также, что примесь уменьшает межфазное натяжение и капиллярное давление. Тогда в соответствии с построениями рис. 66 имеем для точек $M^-(s^-, c^-)$ и $M^+(s^+, c^+)$

$$\begin{gathered} \xi_j = \frac{\partial F(s^-, c^-)}{\partial s} = \frac{F(s^-, c^-)}{s^- + \Delta A/\Delta c} \leqslant \frac{F(s^-, c^-)}{s^- + A^-_c}, \\ \frac{F^+}{s^+ + A^+_c} \leqslant \xi_j = \frac{\Delta F}{\Delta s} \leqslant \frac{\partial F(s^+, c^+)}{\partial s}, \quad \Delta X = X^+ - X^-. \end{gathered} \tag{V.102}$$

На плоскости (s, c) линиям $F = F(s, c^+)$ и $F = F(s, c^-)$ соответствуют горизонтальные прямые $c = c^{\pm}$, а прямой M^-M^+ — кривая $Y = 0$, касающаяся прямой $c = c^-$ в точке M^-.

Величина Y положительна под кривой $M^+M^-M^*$ и отрицательна над ней. Вдоль $M^+M^-M^*$ имеем из (V.101):

$$dc/ds = -G(s, c) = -P_{,s}/P_{,c} < 0.$$

Функция $Z(c)$ обращается в нуль (рис. 67) при $c = c^+$; она положительна для тех c, для которых

$$[a(c) - a(c^-)](c - c^-)^{-1} > [a(c^+) - a(c^-)](c^+ - c^-)^{-1}. \quad \text{(V.103)}$$

В дальнейшем будем предполагать, что условие (V.103) выполняется при $c^+ < c < c^-$. На роль, которую это условие играет при построении тонкой структуры скачка, указал А. Ф. Зазовский. С учетом принятых допущений $B < 0$, и знаменатель в правой части уравнения (V.101) обращается в нуль при $Z > 0$, $Y > 0$, т. е. изоклина бесконечности $dc/ds = \infty$, лежит вне криволинейного треугольника $M^+M^-M^*$ (см. рис. 66). В этом случае поле направлений в фазовой плоскости уравнения (V.101) принимает вид, показанный на рис. 66, и существует единственная траектория M^+M^-, соединяющая особые точки M^+ и M^-. Более детальный анализ показывает, что траектория M^+M^- является сепаратрисой седла M^+, принадлежащей пучку траекторий, входящих в седло-узел M^-. Асимптотика решения вблизи особых точек устанавливается при помощи известной техники, причем оказывается, что вблизи точек M^+ и M^-, соответственно

$$c - c^+ = k(s - s^+), \quad k > 0,$$

$$c - c^- \sim -c^+ \exp[R/(s - s^-)](s - s^-)^{-2}, \quad s < s^-,$$

$$R = 2G^- \{F^- - \xi_j (s^- + A^-_{,c})\}/B^- F^-_{,ss} > 0. \quad \text{(V.104)}$$

РИС. 66. К исследованию структуры сопряженного скачка насыщенности и концентрации активной примеси

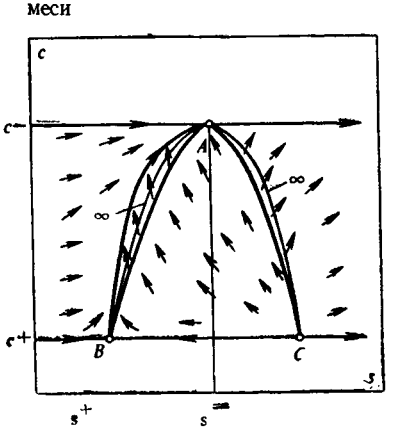
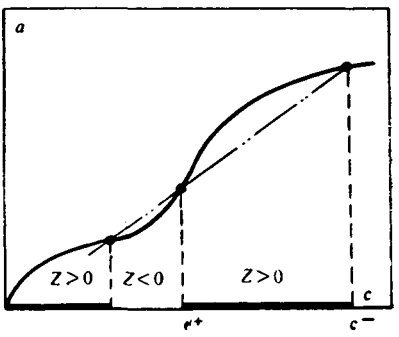


РИС. 67. К определению знака $Z(c)$



Интегрируя уравнения (V.100) и используя асимптотические соотношения (V.104), находим

$$s - s^- \sim 2G^-/B^-H^-F^-_{,ss}\eta, \quad c - c^- \sim \text{const}\,\eta^{-2}\exp(-\chi^-\eta), \quad \eta \to -\infty,$$
$$s - s^+ \sim \text{const}\exp(-\chi^+\eta), \quad c - c^+ \sim \text{const}\exp(-\chi^+\eta), \quad \eta \to \infty,$$

$$\chi^\pm = -\frac{\varepsilon U}{\sqrt{D}}\left[F^\pm - \xi_l\left(s^\pm + A^\pm_{,c}\right)\right] = -\frac{\varepsilon U}{\sqrt{D}}\frac{\xi_2^\pm - \xi_l}{s^\pm + A^\pm_{,c}}. \qquad \text{(V.105)}$$

Последние выражения показывают, что ширина переходной зоны ($\sim 1/\chi^\pm$) обратно пропорциональна скорости скачка и тем меньше, чем больше разница между характеристическими скоростями $\xi_2^\pm$ второго семейства характеристик и скоростью скачка.

Существенно также, что за скачком изменение концентрации происходит экспоненциальным образом, а насыщенности — степенным, т. е. значительно медленнее. Если попытаться построить внутреннее решение типа равномерно распространяющейся волны при $a_{,c} \equiv \text{const}$ (так называемый контактный разрыв, когда скорость скачка равна характеристической скорости во всем диапазоне изменения концентрации примеси в скачке), то окажется, что такого решения нет. Построение внутреннего решения в таком случае требует более тонких рассуждений. Решение это имеет вид расширяющейся пропорционально $t^{1/2}$ переходной зоны (наподобие тепловой волны).

Заметим, что построение внутреннего решения существенно использует условие (V.103), в силу которого в полосе $c^+ < c < c^-$ нет особых точек уравнения (V.101). По-видимому, это условие следует рассматривать как дополнительное необходимое условие устойчивости скачка.

Неравновесные эффекты в структуре сопряженного скачка. В задачах вытеснения нефти раствором активной примеси возникает новый важный источник неравновесности — нарушение равновесия в распределении активной примеси между водой, нефтью и пористым скелетом, а также между отдельными компонентами гетерогенной пористой среды. Связанные с этим эффекты проанализируем вновь на простейшей ситуации — задаче вытеснения водорастворимой полезной примеси в пренебрежении капиллярными эффектами и диффузией в направлении потока.

Имеем задачу

$$\frac{\partial ms}{\partial t} + U\frac{\partial F(s, c)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (msc + a)}{\partial t} + \frac{U\partial cF}{\partial x} = 0,$$
$$\partial a/\partial t = \tau^{-1}\varphi(c, a) \quad \varphi(c, a^*(c)) = 0, \qquad \text{(V.106)}$$
$$s(x, 0) = s_0, \quad c(x, 0) = c_0, \quad s(t, 0) = s^0, \quad c(t, 0) = c^0, \quad a(x, 0) = a^*(c_0).$$

Отношение времени установления равновесного распределения примеси к времени движения жидкости в пласте играет в последующем рассмотрении роль малого параметра задачи. Внешнее решение задачи остается прежним. Чтобы построить внутреннее решение, перейдем к подвижной системе координат: $\eta = (x - Vt)/\tau V$;

$t' = t/\tau$, и будем искать стационарное распределение $s = s(\eta)$, $c = c(\eta)$. При этом имеем

$$F - \xi_j s = F^+ - \xi_j s^+ = F^- - \xi_j s^- = \text{const},$$

$$cF - \xi_j (cs + A) = c^\pm F^\pm - \xi_j (c^\pm s^\pm + A^\pm) = \text{const},$$

$$da/d\eta = -\varphi(a, c) \quad (A = a/m). \tag{V.107}$$

Выражая из первых двух соотношений (V.107) a через c, имеем линейную связь между этими величинами:

$$a = a^+ + \xi_j^{-1} m (c - c^+)(F^+ - \xi_j s^+), \tag{V.108}$$

$$c = c^+ + \xi_j (a - a^+)(F^+ - \xi_j s^+)^{-1}/m.$$

При этом связь между η и a определяется интегрированием уравнения (V.107)

$$\eta = -\int \frac{da}{\varphi(a,\ C(a))}. \tag{V.109}$$

Для интерпретации этого результата удобно воспользоваться (c, a)-диаграммой (см. рис. 58).

Нетрудно видеть, что равновесная изотерма сорбции $a = a^*(c)$ разбивает первый квадрант плоскости (c, a) на две части; над этой кривой $\varphi < 0$, под ней $\varphi > 0$. Интегрирование (V.109) происходит по прямой, соединяющей точки (c^+, a^+) и (c^-, a^-), так что при очевидных допущениях φ положительно вдоль пути интегрирования и обращается в нуль в крайних точках. При этом η изменяется от $-\infty$ до ∞. Стационарное распределение концентрации, определяемое выражением (V.109), в физических координатах имеет эффективную толщину, пропорциональную τV, и, таким образом, расширяется с увеличением скорости вытеснения. Соответствующий профиль насыщенности однозначно определяется из первых соотношений (V.107). Полученное решение определяет главный член поправки к крупномасштабному решению, вносимой неравновесностью сорбции. Согласно ему неравновесность сорбции сказывается на динамике нефтеотдачи, но не на ее конечном значении. Эффекты, связанные с конечной нефтеотдачей, требуют анализа следующих членов разложения.

Капиллярная пропитка. Как уже говорилось в гл. IV, одним из важнейших процессов, формирующих нефтеотдачу гетерогенных пластов, является капиллярная пропитка — впитывание воды в малопроницаемые пропластки и блоки породы, первоначально заполненные нефтью. Поэтому важно знать, как влияет на эти процессы наличие в воде активной примеси, влияющей на фазовые проницаемости и капиллярное давление. Рассмотрим здесь лишь основной процесс одномерной противоточной капиллярной пропитки, характеризующейся равенством нулю суммарного потока фаз. Описание этого процесса дается системой (V.98), в которой следует положить $U \equiv 0$. Имеем задачу:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Ff_2}{\mu_2}\left(P_{,s}\frac{\partial s}{\partial x} + P_{,c}\frac{\partial c}{\partial x}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial [msc + a(c)]}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left[c \frac{Ff_2}{\mu_2}\left(P_{,s}\frac{\partial s}{\partial x} + P_{,c}\frac{\partial c}{\partial x}\right)\right] = \nu \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \text{(V.110)}$$

$$s(x, 0) = s_0, \; c(x, 0) = c_0,$$
$$s(0, t) = s^0, \; c(0, t) = c^0.$$

Сформулированная задача, как легко видеть из соображений размерности, имеет, подобно задаче обычной капиллярной пропитки, автомодельное решение вида

$$s = S(\xi), \; c = C(\xi), \; \xi = x(\varepsilon t)^{-1/2}, \quad \text{(V.111)}$$

где функции $S(\xi)$ и $C(\xi)$ — решение задачи

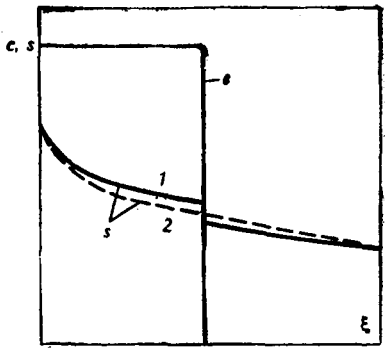


РИС. 68. Распределение концентрации c активной примеси и насыщенности s при капиллярной пропитке:
$1 - P_{,c} \neq 0$; $2 - P_{,c} = 0$

$$\frac{d}{d\xi}\left[X(s, c)\frac{ds}{d\xi} + Y(s, c)\frac{dc}{d\xi}\right] + \frac{\xi}{2}\frac{ds}{d\xi} = 0, \quad X = \frac{Ff_2}{\mu_2}P_{,s}, \; Y = \frac{Ef_2}{\mu_2}P_{,c},$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(cX\frac{ds}{d\xi} + cY\frac{dc}{d\xi}\right) + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\nu D}{\varepsilon}\frac{dc}{d\xi}\right) + \frac{\xi}{2}\frac{d(mcs + a)}{d\xi} = 0. \quad \text{(V.112)}$$

Характер этого решения определяющим образом зависит от соотношения капиллярного и диффузионного коэффициентов переноса. Ограничимся здесь случаем, когда диффузионный перенос мал, что отвечает обычному соотношению параметров. При этом, полагая в (V.112) $D \equiv 0$ и вычитая из второго уравнения первое, умноженное на c, получим

$$(ms + a_{,c})\frac{\partial c}{\partial t} + \varepsilon\left(X\frac{\partial s}{\partial x} + Y\frac{\partial c}{\partial x}\right)\frac{\partial c}{\partial x} = 0. \quad \text{(V.113)}$$

Таким образом, перенос концентрации примеси описывается уравнением первого порядка, которое допускает разрывные решения (в частности, концентрация примеси может переноситься в виде «ступеньки»). При этом, поскольку в силу первого уравнения (V.110) капиллярное давление на скачке непрерывно, скачок концентрации сопровождается скачком насыщенности из условия

$$P(s^+, c^+) = P(s^-, c^-). \quad \text{(V.114)}$$

Условие баланса насыщенности, следующее из первого уравнения (V.110), определяет связь между скоростью скачка, величиной скачка насыщенности и скачками производных $s_{,x}$ и $c_{,x}$.

Типичная картина решения показана на рис. 68. Характерно отставание фронта примеси от фронта воды. Это свойство имеет важные последствия. Поскольку ведущий механизм — капиллярная пропитка чистой водой, наличие активной примеси слабо влияет на скорость пропитки. В этих условиях основной эффект активной примеси может быть связан лишь с ее влиянием на неснижаемую нефтенасыщенность $(1 - s^0)$. Ясно, что на этот показатель и следует

обращать внимание при подборе агента воздействия при заводнении гетерогенных пластов с гидрофильными блоками.

Иная картина получается, если блоки первоначально гидрофобны и пропитка их водой невозможна. В этом случае принципиального улучшения показателей процесса можно достичь, добавив к воде гидрофилизующий реагент (ПАВ), делающий поверхность породы гидрофильной. Можно показать, что в таком случае скорость процесса определяется опережающей диффузией химреагента, который ведет за собой пропитку. Этот вывод также существен для правильного выбора гидрофилизирующих реагентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.— ПММ, т. 16, 1952, вып. I, с. 67—78.
2. *Баренблатт Г. И.* Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде.— ПММ, т. 16, 1952, вып. 6, с. 679—698.
3. *Баренблатт Г. И.* О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме.—Изв. АН СССР, 1954, № 9, с. 35—49.
4. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Изд. 2-е. Гидрометеоиздат, Л., 1978.
5. *Баренблатт Г. И., Винниченко А. П.* Неравновесная фильтрация несмешивающихся жидкостей.— Успехи механики, 1980, № 3, с. 35—50.
6. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., Недра, 1972.
7. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах.— ПММ, т. 24, 1960, вып. 5, с. 852—864.
8. *Бедриковецкий П. Г.* Вытеснение нефти оторочками растворов активных примесей.— Докл. АН СССР, 1982, т. 262, № 1, с. 49—53.
9. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., Наука, 1975.
10. *Бернк Э.* Свойства пластовых жидкостей. М. Гостоптехиздат, 1960.
11. *Бузинов С. Н., Умрихин И. Д.* Гидродинамические методы исследования скважин и пластов. М., Недра, 1973.
12. *Влияние* свойств горных пород на движение в них жидкостей / А. Бан, А. Ф. Богомолова, В. А. Максимов и др. М., Гостоптехиздат, 1962.
13. *Губкин И. М.* Учение о нефти. М., Наука, 1975.
14. *Данилов В. Л., Кац Р. М.* Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкости в пористой среде. М., Недра, 1980.
15. *Движение* углеводородных смесей в пористой среде. В. Н. Николаевский, Э. А. Бондарев, Г. С. Степанова и др. М., Недра, 1968.
16. *Девликамов В. В., Хабибуллин З. А., Кабиров М. М.* Аномальные нефти. М., Недра, 1975.
17. *Ентов В. М.* Некоторые проблемы математической теории нелинейной фильтрации.— Записки научных семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та АН СССР, т. 96, 1980.
18. *Ентов В. М.* Физико-химическая гидродинамика процессов в пористых средах. (Математические модели про-

цессов повышения нефтеотдачи пластов.) М., Изд. ИПМ АН СССР, 1980.
19. *Ентов В. М., Панков В. Н., Панько С. В.* К расчету целиков остаточной вязкопластической нефти — ПММ, т. 44, 1980, вып. 5, с. 847—856.
20. *Ентов В. М., Полищук А. М.* О роли сорбционных процессов при движении полимерных растворов в пористой среде.— Изв. АН СССР, сер. МЖГ, 1975, № 3, с. 68—76.
21. *Желтов Ю. П.* Механика нефтегазоносного пласта. М., Недра, 1975.
22. *Иванов В. А., Храмова В. Г., Дияров Д. О.* Структура порового пространства коллекторов нефти и газа. М., Недра, 1974.
23. *Коллинз Р.* Течение жидкостей через пористые материалы. Пер. с англ. М., Мир, 1964.
24. *Котляр Л. М., Скворцов Э. В.* Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с предельным градиентом. Изд. Казанского ун-та. 1978.
25. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1958.
26. *Лейбензон Л. С.* Подземная гидродинамика. М., Изд-во АН СССР, 1953.
27. *Маскет М.* Физические основы технологии добычи нефти. Перев. с англ. М.—Л., Гостоптехиздат, 1953.
28. *Мирзаджанзаде А. Х.* О теоретической схеме явления ухода раствора.— ДАН АзССР, 1953, т. 9, № 4, с. 203—205.
29. *Мирзаджанзаде А. Х.* Особенности фильтрации неравновесных систем. Минск, Изд. ИТМО АН БССР, 1975.
30. *Неравновесные* эффекты при фильтрации вязкоупругих жидкостей/ Г. И. Баренблатт, Ю. Г. Мамедов, А. Х. Мирзаджанзаде и др.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5, с. 76—83.
31. *Об определении* параметров нефтяного пласта по данным о восстановлении давления в остановленных скважинах/ Г. И. Баренблатт, Ю. П. Борисов, С. Г. Каменецкий и др.— Изв. АН СССР, 1957, № 11, с. 84—91.
32. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М., Наука, 1975.
33. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М., Наука, 1977.
34. *Развитие* исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967). Отв. ред. П. Я. Кочина. М., Наука, 1969.
35. *Рейнер М.* Деформация и течение. Пер. с англ. М., Гостоптехиздат, 1963.
36. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М., Наука, 1978.
37. *Рыжик В. М.* О капиллярной пропитке водой нефтенасыщенного гидрофильного пласта.—Изв. АН СССР, сер. Механика и машиностроение, № 2, 1960, с. 149—151.
38. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., Наука, 1977.
39. *Сейвинс Дж.* Неньютоновское течение в пористой среде.— Механика. Сб. перев., 1974, № 2 (144), с. 59—115.
40. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., Наука, 1972.
41. *Физико-геологические* основы повышения нефтеотдачи пластов/ А. Х. Мирзаджанзаде, М. Ф. Мирчинк, Ю. В. Желтов и др. М., Недра, 1975.
42. *Фильтрация* газированной жидкости и других многокомпонентных смесей в нефтяных пластах/ М. Д. Розенберг, С. А Кундин, А. К. Курбанов и др. М., Недра, 1969.
43. *Христианович С. А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси.—ПММ, т. 4, 1940, вып. I, с. 33—52.
44. *Чарный И. А.* Подземная гидродинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
45. *Чарный И. А.* Строгое доказательство формул Дюпюи для безнапорной фильтрации с промежутком высачивания.— Докл. АН СССР, т. 79, 1951, № 6, с. 937—940.
46. *Шейдеггер А. Э.* Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостоптехиздат, 1960.
47. *Щелкачев В. Н.* Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
48. *Эфрос Д. А.* Исследование фильтрации неоднородных систем. М., Гостоптехиздат, 1963.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ

§ 1. Особенности теории движения жидкости и газа в природных пластах 5
§ 2. Пористые среды 7
§ 3. Закон Дарси, пределы его применимости и уточнения 9
§ 4. Уравнение неразрывности и основные уравнения теории фильтрации 14

Глава 2
КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Простейшие установившиеся напорные течения 20
§ 2. Качественные методы теории напорных течений 28
§ 3. Установившиеся безнапорные течения 36
§ 4. Нестационарное движение однородной сжимаемой жидкости. Линейная теория 38
§ 5. Нестационарное движение однородных жидкостей. Нелинейные эффекты . . . 51

Глава 3
НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

§ 1. Теория фильтрации неньютоновских жидкостей. Закон фильтрации 74
§ 2. Стационарные задачи фильтрации неньютоновских жидкостей 79
§ 3. Нестационарные задачи фильтрации неньютоновских жидкостей 93
§ 4. Неравновесность при фильтрации однородных жидкостей. Движение в трещиновато-пористых и слоисто-неоднородных пластах 104

Глава 4
ДВУХФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ И ТЕОРИЯ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ

§ 1. Основные представления теории двухфазного течения в пористых средах 118
§ 2. Структура двухфазного течения при крупномасштабном описании. Задача Баклея — Леверетта 128
§ 3. Структура течения при мелкомасштабном описании. Стабилизированная зона. Капиллярные эффекты в пористых средах 136
§ 4. Неравновесные эффекты при двухфазной фильтрации 150
§ 5. Устойчивость вытеснения несмешивающихся жидкостей 155
§ 6. Теория вытеснения неньютоновских жидкостей. Влияние вязко-пластических свойств нефти на нефтеотдачу[1] 161

Глава 5
ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ ПОДЗЕМНАЯ ГИДРОДИНАМИКА НЕФТЯНОГО ПЛАСТА

§ 1 Процессы тепло- и массопереноса в пористой среде 172
§ 2. Вытеснение нефти растворами активных примесей 182
§ 3. Эффекты диффузии и неравновесности в задачах вытеснения нефти раствором активной примеси 200

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 206